



BIBLIOTHECA  
UNIV. JAGELL.  
CRACOVII 1828

55341

III

Mag. St. Dr. P



~~Matem. fol. 418.~~



55341  
II

1885. d. 535.

m



# POCZĄTKI GEOMETRYI

DZIEŁO JE<sup>o</sup> M. Pana CLAIRAUT,  
Akademii Królewskich: Paryskiej, Lon-  
dynskiej, Berlińskiej, Petersburskiej,  
Upsalskiej, Edimburskiej, i Bonońskiej,  
Towarzysza;

Z FRANCUSKIEGO NA POLSKI JĘZYK

PRZETŁUMACZONE.



Władysław Krutowski.



W WILNIE

W Drukarni J. K. M. i Rzeczy-Pospolitej  
Akadem: Soc: JESU.

MDCCCLXXII.

*h. 6, 14, 220, 22, 7, 14*  
*h. 33, 14, 75*



POCZĄTKI  
GEOMETRYI

Przełożył J. M. P. C. C. C. C.

Wydrukowano w Warszawie  
w Drukarni Księżnej, przy  
ulicy Królów, u P. C. C. C.

1804

Wydrukowano w Warszawie

PRZETŁUMACZENIE

55341

II

W WILNIE

Wydrukowano w Warszawie

W WILNIE

JAŚNIE OŚWIECONEMU  
XIAŻĘCIU JEGOMOŚCI  
MICHAŁOWI KAZIMIERZOWI  
NA KLEWANIU I ŻUKOWIE  
CZARTORYSKIEMU  
KANCLERZOWI WIELKIEMU  
W. X. LITEWSKIEGO,  
ORDERU ORŁA BIAŁEGO  
KAWALEROWI,  
HOMELSKIEMU, JURBORSKIEMU, UŚWIAT-  
SKIEMU, PODUŚWIATSKIEMU, &c. &c.  
STAROŚCIE.



JAŚNIE OSWIECONY MOŚCI  
X I A Ż E.



Stawnego Autora dzieło o Po-  
czątkach tey nauki, którą  
W. Xca Mć gorliwości i na-  
kładów Swoich zawsze go-  
dną być sądziłeś, na Oyczysty ięzyk wy-  
łożone, żeby większą zaletę mieć, i po-  
żądany Kraiowi pożytek przynieść mo-  
gło:



\* \* \* \* \*

gło: dozwolisz Jaśnie Oświecony Mci  
 Xiażę ukazać się mu pod zaszczytem  
 przeważney Protekcyi swoiey, á mnie  
 iednemu z tych, którzy mieli honor  
 nakładem W. Xcey Mci w cudzych  
 krajach uczyć się Matematyki, użyć tey  
 okkazyi do oświadczenia powinney So-  
 bie wdzięczności, i wyznania przed  
 światem, że się znam być z naygłębszym  
 uszanowaniem

WASZEY XIAŻĘCEY MCI

Wiecznie obowiązaym  
 i nayniższym sługą  
 X. MARCIN POZOBUT Soc: JESU  
 Astron. J. K. Mci  
 Tow. Akad. Lond.



## PRZEDMOWA A U T O R A.



U B O Geometrya jest sa-  
 ma przez się wysoka  
 i trudna nauka, nale-  
 ży iednak to wyznać, że trudności,  
 których zwykliśmy doświadczać, gdy  
 się do niey przykładac poczynamy,  
 nayczęściey pochodzą z sposobu, któ-  
 rym początki oney są pisane. Wi-  
 dzieć tam pospolicie na samym wstę-  
 pie wielki tłum definicyi, postulatów,  
 axyomatów, i innych pryncypiów  
 drogę do tey nauki gotujących, któ-



re zdaia się wczesnie przestrzegać Czytelnika, iak suchych i twardych rzeczy ma się daley spodziewać. Następuią potym propozycye, które mając za cel ogulne á trudne do poięcia prawdy, nie w szczegulności niestawia przed oczy, coby rozum i imaginacyą ciekawie zabawić, á ochotę zaostrzyć mogło. Przetoż pospolicie to się trafia, że poczynaiący uczyć się Geometrii, rychley spracowani i z przedsięwzięcia swego zrażeni bywaią, aniżeli zupełnie poznać mogli, co to iest Geometrya, której chciano ich nauczyć.

Prawda to, że niektórzy Autorowie chcąc zabezpieczyć tey oschłości, której ledwo można uniknąć ucząc się Geometrii, każdą z walnych propozycyi wraz do praktyki stosuią, albo,

iak

iak stosowana być może, uczą. Lecz to czyniąc, ukazuią pożytek i potrzebę Geometrii, á nie sposoby uczenia się oney ulacniaią. Ponieważ bowiem każda propozycja musi być pierwey położona, aniżeli oney aplikacya do praktyki, rozum nierychley może mieć zabawkę koło obiektów sobie zwyczajnych, to iest szczegulnych i zmyślom znaiomych, aż się natrudzi zrozumieniem prawd powszechnych i trudnych.

Niektóre uwagi, którem uczyniłem nad pierwiastkami Geometrii, wierzyć mi każą, żem uprzatnął z drogi te zawady, które pierwsze kroki poczynaiących zatrudniać zwykły, pisząc tym sposobem, żebym i ciekawość zabawił, i rozum oświecił. Myśliłem sobie, że ta nauka, tak iako

wszy-



wszystkie inne, powoli wzrost swój brała, i nie przyszła do tego stopnia, na którym się dziś znayduie, ieno po szczeblach; że wedle wszelkiego podobieństwa iakaś potrzeba była okazyą pierwszych w tey mierze kroków, te zaś nie mogły być nad zdolność i siły poczynających, ponieważ nie od kogo innego ieno od poczynających musiały być uczynione.

Na tym zdaniu zasadzony, przedsięwzięłem tam obrócić wszystkę myśl i uwagę, zkąd Geometrya mogła wziąć początek. Jakoż starałem się wszystkie odkryć *principia*, i sam grunt ukazać tych rzeczy, które mogły być okazyą tey nauce; a to sposobem naturalnym, i nieumiejętności poczynających przyzwoitym, to jest takim, iaki

metryi

metryi wynalezców: nieprzywodząc iednak omylnych przemyśłów, i błędnych praktyk, na które wpadać oni koniecznie przy początkach musieli.

Ziemia, której wymiar od wieków był potrzebny, zdała mi się być Matką pierwszych Geometrycznych propozycji. Iakoż w rzeczy samey od wymiarów ziemnych Geometrya wzięła początek razem z nazwiskiem, które nic innego nieznaczy, ieno *Wymiar ziemi*. Niektórzy Autorowie rozumieją, że Egipcynie widząc, iako Nil przez wylewy swoje ustawicznie pflował i mieszał im granice, założyli pierwsze fundamenta Geometryi, szukając sposobów, któremiby zupełnie ubezpieczyć sobie mogli pozycye, rozległości, i figury gruntów i własności swoich. Lecz chociażbyśmy zgola

nieprze-



nieprzeſtali na zdaniu tych Autorów, wątpić iednak o tym nie możemy, że ſkoro ludzie rozmnażać ſię na ſwiecie, dzielić ſię na różne familie, a pewne ſiedliſka i dzierżawy mieć poczęli, natychmiaſt ſzukali ſpoſobów mierzenia i dzielenia ſwych gruntów. Chcąc potym wydoſkonalić te ſpoſoby, których ie nauczyła bieda, za czasem od wynalazków i przemysłów ſzczegulnych przyſzli do poſwszechnych. Na koniec ſzukając ſpoſobu, którymby wſzytkie zgoła wielkości iedne z drugimi komparując, wzaiemną onych do ſiebie relacyą łącno poſcięgnąć, i zupełnie determinować mogli, uformowali naukę mającą za cel więcej nie równie rzeczy, aniżeli oni ſobie z początku zakładali: zachowując iednak, i potomnym wiekom podając

toż sa-

toż ſamo nazwiſko, które przy pierwiaſtkach tey nauce nadali.

Ia żebym w tym dziele ſzedł torem pierwſzych wynalezców, naprzód uſiluję odkryć i objaſnić te *principia*, które wpłynąć mogą do wymiaru gruntów, i odległości tak przyſtepnych, iako nieprzyſtepnych, &c. Ztąd poſtępuję do innych wynalazków tak z pierwſzemi związanych, że wrodzona wſzytkim ludziom ciekawość minąć onych i przeſkoczyć niedopuszcza. Zachęcając potym, i nieiako uſprawiedliwiając tę ciekawość ukazaniem wynikających ztąd w praktyce pożytków, z ochoczym już Czytelnikiem przebiegam to wſzytko, co ieſt w Geometrii naypotrzebnieyszego.

\*\*\*

Prze-



VIII PRZEDMOWA

Przeczyć temu zdani się niemożna, że ten sposób przynamniey służyć będzie do zachęcenia tych, którzyby mierzyć sobie mogli suchość prawd Geometrycznych do żadney praktyki nieftosowanych. Wszakże ia się spodziewam i tego iefzcze, co więkſzy nie równie przyniesie pożytek, a to iefť, że się tym ſposobem przyuczy rozum do ſzukania, i odkrycia ſam przez ſię prawdy. Przetoż umyſłnie żadney propozycji nie trąduę pod zwyczajnym kształtem Teorematów, albo tych uwag, któremi ſię to lub owo niezbiecie dowodzi, ale iakim ſposobem iefť odkryto, całe ſię zamilcza.

Ieſli pierwſi Matematycy ułożyli wynalazki ſwoie w Teoremata, i tak one na ſwiat wydali, uczynili to bez wątpienia albo dla ziednania im nie-

iakiey

A U T O R A.

IX

iakiey miſternoſci, która zwykła obrać na ſię ludzką ciekawość, i ſprawować zadumienie, albo dla uniknienia pracy, którąby podiać muſieli, wywodząc porządnie naypierwſze ſwe uwagi, za których przewodnictwem do tych wynalazków przyſzli. Iakożkolwiek iefť, mnie ſię zdało, że przyzwolciey nierównie, i pożyteczniey uczynię, ieſli Czytelników moich uſtawicznie zabawiać będę rezolucyą Problematów, to iefť ſzukaniem ſposobów albo do wykonania iakiey operacyi, albo do odkrycia niewiadomey prawdy, przez determinowanie relacyi zachodzącey między wielkoſciami znaiomemi, i wielkoſciami któreby znaleźć chciano. Idąc tą drogą poczynaiący łącno poſtrzegać i widzieć będą racye determinuiące wy-

2

nalezcę,



należce, a tym samym będą mogli nabywać dowcipu do Inwencji zgodnego.

Znają się podobno, którzy zarzucać mi będą nie na jednym miejscu tych Początków, że się zbyt zaśladam na świadectwie oczu, a mniej dbam o rygor demonstracyi Geometrom zwyczajnych. Tych ja więc proszę, aby postrzegając co mi przyganić mogą, to też uważać chcieli, że jeśli ja niektóre propozycje odbywam lekko, tedy te tylko, których prawda natychmiast odkryta być może, skoro na lekką uwagę wzięte będą. Tak ja postępuję najbardziej z początku, gdzie się najczęściej zdarza tak łatwych propozycji. To bowiem uważałem i mam z doświadczenia, że ci

nawet

nawet, którzy mając wrodzoną do Geometrii sposobność, przykładali się do niej z ochotą, natychmiast mierzili ją sobie, skoro wprowadzeni byli w tłum demonstracyi służących, iż tak rzekę, do zagłuszenia bardziey, niż do oświecenia poczynających.

Jeśli Euklides zadał sobie pracy, demonstrując te propozycje, których demonstracya zda się być niepotrzebna, na przykład że dwa cyrkulów, które się wzajem rozcinają, nie jest toż samo centrum: że summa boków tryangulu zawartego w innym mniejsza jest od summy boków tryangulu, w którym się on zawiera: temu się dziwić zgoła niepotrzeba. Ten Geometra miał sprawę z wykrętnemi Zofistami, którzy za chwałę sobie mieli dysputować upornie przeciwko nawi-  
widom-



widomszym prawdom. Trzeba więc było, żeby Geometria tak, iako Logika, używała argumentowania i sztucznych wywodów na obronę widomych nawet prawd przeciwko tym pieniaczom. Ale dziś inaczej rzeczy idą. Probować i dowodzić tego, co zdrowy rozum za pierwszym weyrzeniem łącno widzieć może, jest to próżną robotę robić, albo raczej prawdę przez się iasną słowami zacimiać, a Słuchaczów albo Czytelników w niesmak i tełknicę wprawować.

Drugi zarzut, którego bym się mógł spodziewać, jest ten: że opuszcziłem wiele propozycji, które się znajdują w poſpolit, ch Elementach Geometrii, tych zaś, które przedsiębiore traktować, same tylko fundamenta wywo-  
dzą.

Na to

Na to tak ia odpowiadam: Wszystko to, co służy do mego przedsięwzięcia, znajduie się w tych początkach: propozycye zaś, którem opuścił, są te, które ani przez się nie są potrzebne, ani do zrozumienia potrzebnych zgola nie służą. Lubo krótko mówię o proporcjach, wszakże toż samo, co mówię, powinno dostatecznie służyć do zrozumienia tych elementarnych propozycji, bez których się obeysć niemożna w proporcjach. Obszerniey i gruntowniey tę Materyą traktować będę w początkach Algebry, które wkrótce mam wydać.

Nakoniec ponieważ obrałem wymiar ziemny za śrzodek zachęcenia do Geometrii tych, którzy się przykładają do niej poczynają, mam się podobno tego ieszcze obawiać, ażeby  
te



te Początki Geometryczne niebyły wzięte za jedną z pospolitych Ksiąg o praktyce mierniczej. Wszakże to nie może przyść na myśl chyba tym tylko, którzy uważać nie będą, że wymiar ziemny nie jest prawdziwym celem tej Księgi, ale jest mi przewodnictwem i okazją do odkrycia pryncypalnych prawd Geometrycznych. Mógłbym bez wątpienia podobnym sposobem wywieść z swych początków też same prawdy, wzięwszy przedsię historiją Fizyki, Astronomii, lub iakieykolwiek inney części Matematyki, którąby mi się obrać zdało. Lecz nacisk myśli do przedsięwzięcia mego nieśluzących, któreby przypuścić trzeba było, zatłumiłby nie iako myśli Geometryczne, do których iedynie miałem przywiązać uwagę Czytelnika.

POCZĄTKI.



# POCZĄTKI GEOMETRYI.

## PIERWSZA CZĘŚĆ

*O sposobach, przez które naynaturalniey ludzie przyszedli do wymiarów ziemnych.*



UWAŻAJĄCEMU same Geometryi początki, zda się, że od długości rzeczy, i odległości mieysc naypierwsze zaczęły się rozmiary.

I.

Sposob mierzenia iakieykolwiek długości, który podaje nieiakaś wrodzona



dzona ludziom Geometrya, iest: zkomparować, czyli porównać długość iakieykolwiek miary znajomey z długością, którą poznać chcemy.

## I I.

Linia prosta iest naykrótszą ze wszystkich, które mogą być prowadzone od jednego Punktu do drugiego a zatym iest miarą odległości onych od siebie.

Co się tycze odległości: widomo iest, iż dla zmierzania tey, która iest między dwoma punktami, potrzeba prowadzić linią prostą od iednego punktu do drugiego, i onę wymierzyć miarą znajomą; ponieważ wszystkie inne linie w tę lub owę stronę mniej albo więcej zbaczające, zawsze dłuższe są niż linia prosta, która nijako niezbacza.

## I I I.

Prócz potrzeby mierzenia odległości iednego punktu od drugiego, zdarza się też często potrzeba zmierzania odległości punktu od linii. Naprzykład: znajdując się kto na mieyscu D, nad brzegiem iakiey rzeki, chciałby wiedzieć, iaki iest przeciąg między mieyscem,

TABLICA.  
I.  
Fig. 1.

scem, na którym stoi, a linią AB, która iest na drugim brzegu. Jawno iest, iż wtym razie, chcąc zmierzyć odległość żadaną, potrzeba obrać iedną, a to naykrótszą ze wszystkich linii prostych DA, DB, DC, które można prowadzić od punktu D, do linii AB. Łacno zaś widzieć, iż ta linia naykrótsza, o którą tu idzie, nie iest inna, jak DC, która wedle założoney suppozycyi nie powinna skłaniać się ani ku A, ani ku B, jako się też wrzeczy samey nieskłania. I tę to linią, którą nazwano perpendykularną, należy zmierzyć miarą znajomą, chcąc wiedzieć odległość punktu D, od linii prostej AB. Gdzie widzieć takż. łacno, iż nim się przyłoży miara znajoma do linii DC, potrzeba, ażeby ta linia wprzód była prowadzona; musiano więc mieć sposob prowadzenia linii perpendykularnych.

Linia na drugiey stojąca, a ku żadney stronie nie skłonięna, iest, do oney perpendykularna.

## I V.

W innych też niezliczonych okolicznościach zdarzała się potrzeba prowadzenia tychże linii perpendykularnych.

A2

nych.



TAB: I. nych. Naprzykład: wiadomo jest, że regularność figur takich, jakie są AB CD, FGHI nazwanych Rektangulami,

Fig: 2. i 3. Rektangul jest to Figura mająca cztery ściany wzajemnie do siebie perpendykularne. mi, a składających się ze czterech ścian, czyli boków wzajemnie do siebie perpendykularnych, zachęca, i nie jako pociąga nas do dania onych kształtu, Domom, Dziedzińcom, Ogrodom, Pałacom, Pokojom &c.

Kwadrat jest to Rektangul, którego cztery ściany są równe. Pierwsza z tych figur ABCD, której wszystkie cztery boki są równe, nazywa się pospolicie Kwadratem. Druga FGHI, która niewszystkie boki, ale te tylo, co naprzeciw siebie leżą, ma równe, zowie się ogólnie Rektangulem.

## V.

W różnych operacyach, w których nadarza się potrzeba prowadzenia linii perpendykularnych, te są dwa przy padki: że albo do linii od jakiego punktu od niey odległego, albo od punktu na samey linii, leżącego perpendykularną prowadzić trzeba.

TAB: I. Daymy to naprzykład, że kto z punktu C wyznaczonego na linii AB, chce

chce podnieść linią CD Perpendykularną do AB; trzeba będzie, aby ta linia nieśklaniała się ni ku A, ni ku B. Sposób podniesienia linii perpendykularney

Naprzód tedy założywszy suppozycyą, że C jest w równej odległości od A i B, i że linia CD, nieśklania się w żadną stronę, jawno jest, iż każdy z punktów tej linii, będzie równie odległy od A i B. O nic tedy więcej nie będzie szło, iako znaleźć iakikolwiek punkt D, którego by odległość od punktu A była równa jegoż odległości od punktu B; w ten czas bowiem prowadząc przez C, i przez punkt tak znaleziony linią prostą CD, będziemy mieli żadaną perpendykularną.

Możnaby rzeczonego punktu D, szukać na domysł, i omackiem, lecz ten sposób szukania nieczyni zadość rozumowi, który wyciąga sposobu takiego, któryby go oświecił, a taki jest następujący:

Weź jaką miarę pospolitą: sznur naprzykład, albo cyrkiel podług upodobania otworzony: wedle roboty, którą będziesz miał wpołu, lub na karcie.

A<sub>3</sub> Mia-



*tak i.*  
*tworzy*  
Miary tak wziętey, to iest, albo sznura, albo iedney nogi cyrkla koniec utkwivszy w punkcie A, drugi zaś zatczając, napiszesz łęk PDM. Dopieroż nieodmieniając teyże miary uczynisz toż samo z punktu B, coś już czynił z punktu A, i otrzymasz łęk QDN, który rozcinając pierwszy PDM na D, da ci punkt żądany.

Ponieważ bowiem punkt D, należec będzie równie do dwu łękow PDM, QDN, jedną miarą napisanych, iego odległość od punktu A, zrówna się jego takż odległości od punktu B, więc CD, skłaniając się nie będzie ani ku A, ani ku B. Zatym ta linia będzie perpendykularna do AB.

TAB: I. Jeśli punkt C, nieznayduje się w równey odległości od A, i B, należy wziąć dwa inne punkta *a*, *b*, równie odległe od C, i onych użyć zamiast A, B, dla napisania łękow PDM, QDN.

## V I.

TAB: I. Jeśli by jeden z łękow, naprzykład PDM, był daley prowadzony przez O, E, R

E, R &c. Ażby się wrócił do tegoż punktu P, od którego się począł; obwód cały nazwałby się Peryferyą cyrkula, albo zgoła cyrkulem.

Jeśli by się napisała jedna tylo część PDM Peryferyi, taby się nazwała Arkusem albo łękiem cyrkula.

Punkt, z którego by się cyrkul, albo jakakolwiek część onego napisała, byłby cyrkula, albo części onego, centrum.

Miara zaś, abo przeciąg AD, onych Promień.

Każda linia, która przechodzi przez centrum A, tak, jako D A E, skończy się z obu stron u Peryferyi, nazywa się Dyametrem. Jawno iest, że ta linia iest we dwoje większa od Promienia; dla czego też promień czasem zowie się pół-Dyametrem.

## V I I.

Sposob podniesienia perpendykularney z jakiegokolwiek punktu linii A B, podaje sposob spuszczenia też oney do teyże linii A B, z jakiegokolwiek

Cyrkul iest to obwód cały, który bywa napisany końcem jedney nogi Cyrkla obracaney koło drugiey, w jakim punkcie utkwioney.

Centrum iest ów punkt, w którym koniec jedney nogi Cyrkla bywa utkwiony, gdy druga pisze Cyrkul.

Promień iest otwor Cyrkla, którym się pisze Cyrkul.

Dyametru iest podwoyny promień.

TAB: I.

Fig: 6.



## 8. POCZĄTKI

Sposob spu-  
szczenia li-  
nii perpen-  
dykularney.

wiek punktu E, od niey odległego; ut-  
kwiwszy bowiem albo nici, albo sznura,  
albo iedney nogi cyrkla koniec w pun-  
kcie E, i jedną miarą E b, naznaczywszy  
dwa punkta a, i b, na linii AB, szukać  
należy tak, jako w Artykule V. innego  
punktu D, którego by odległość od pun-  
któw a, i b, była taż sama, a przez  
ten punkt, oraz przez E prowadzić li-  
nią prostą DE, która mając oba swe  
końce równie odległe od a, i b, a nie  
więcey skłaniając się ku jednemu, jako  
ku drugiemu z tych punktów, będzie  
perpendykularną do AB.

## VIII.

TAB: I.  
Fig: 7.

Rozdzielić  
jaką linią na  
dwie części  
równe.

Z przeszley operacyi wynika roz-  
wiązanie jednego nowego Problema.  
Niech idzie naprzykład o podział  
jakiey linii prostej AB na dwie części  
równe; z punktów A, i B, jako z cen-  
trów otworem Cyrkla iakiemkolwiek,  
byleby jednym, napisać łęki R E I,  
GEF, Potym z tychże centrów, tym-  
że co wprzód, lub innym wedle upodo-  
bania otworem napisać także łęki PDM,  
QDN.

## GEOMETRII. 9

QDN. To gdy się uczyni, linia E D  
prowadzona przez punkta Intersekcji  
E, i D, rozetnie linią AB na dwie rów-  
ne części na punkcie C.

## IX.

Znalazszy sposob prowadzenia  
perpendykularnych, niełacnieyszego nie  
było, jako użyć onego do rysowania  
figur, które się zowią Rektangulami, i  
Kwadratami, o których była mowa w  
Artykule IV. Jawno iest, iż dla napisa-  
nia kwadratu ABCD, którego by ścia-  
ny czyli raczej boki, były równe linii  
danej K, trzeba wziąć na linii GE  
długość AB, równą teyże linii K; do-  
pieroż podnieść (Art: V.) z punktów  
A, i B, Perpendykularne A D, B C,  
z którychby każda równa była rzeczo-  
ney linii K; na koniec poprowadzić  
D C.

TAB: I.  
Fig: 2.

Napisać  
Kwadrat,  
mając bok  
onego dany.

## X.

Jeśli by chciano odrysować Re-  
ktangul F G H I, którego by długość  
B była

TAB: I.  
Fig: 3.



Napisać Re- była K, a szerokość L, uczynićby  
ktangut, któ- trzeba linią F G, równą długości K,  
rego długość dopiero podnieść Perpendykularne  
i szerokość F I, i G H, każdą z nich równą szeroko-  
ści dane. kości L, na resztę poprowadzić H I.

XI.

Wykonanie dzieł znacznych, ia-  
kie są usypanie wałów, dukt kanałów,  
prowadzenie regularnych ulic &c.  
*równoległe* obeyść się niemoże bez prowadzenia  
*Parallele* linii, które się zowią Parallele, to jest,  
*to linie, wże* którychby pozycja była taka, iżby  
*dy równie* onych odległość wszędzie miała za mia-  
*odległe od* rę linie Perpendykularne tej samey  
*siebie.* długości. Nic zaś niemasz naturalniey-  
szego moim zdaniem, jako do prowa-  
dzenia tych linii Parallel zasięgnąć one-  
go sposobu, który bywa używany w  
rysowaniu Rektangulów.

TAB: I. Niech będzie naprzykład: A B,  
FIG: 8. jednym z boków albo kanału, albo ja-  
kiegokolwiek wału &c. któremuby  
chciano dać szerokość CA, czyli raczy  
żebyśmy tę kwestyą wyłożyli sposo-  
bem barziej Geometrycznym i po-  
wszech-

wszecznym, daymy że kto chce prowa- Prowadzić  
dzić przez C, parallelę CD do linii Parallele do  
A B, w takim razie obrać należy we- jakiej linii  
dle upodobania punkt jaki B, na linii przez punkt  
A B, i czynić operacyą tym sposobem, dany.  
jak gdyby mając Bazę A B, chciano u- *Podstawę*  
czynić Rektangul A B C D, któryby  
miał za wysokość linią AC. Co gdy-  
by się stało, linie CD, A B, by nie-  
wiem jak były daleko ciągnione, były-  
by zawsze Parallele, albo, co toż samo  
jest, nigdyby się z sobą nie zeszły.

XII.

Ponieważ regularność figur Re-  
ktangularnych, jest powodem, jakeśmy  
wyżej rzekli, częstego onych używa-  
nia, zdarza się wiele przypadków, w  
których potrzeba wiedzieć onych roz-  
ciągłość.

Chcesz naprzykład wiedzieć, wie-  
le wyniść może obicia na jaki pokóy,  
albo wiele ma zawierać sznurów, prę-  
tów, lub łokci Dziedziniec jakiego do-  
mu, mający figurę Rektangulu.

W tych razach każdy widzieć  
B2 mo-



może, iż do znalezienia pewnych w tej mierze determinacyi, jest sposób naykrótszy i naynaturalniejszy, użyć miary znajomey i pospolitey, która na tej Płaszczyźnie, której rozległość zmierzyc chcemy, kilkakrotnie położona, całaby onę okryła.

Sposób wychodzący na ów, któregośmy już użyli, do mierzenia długości linii.

To zaś przez się widomo, iż miara, która do mierzenia Płaszczyzny ma być użyta, powinna być także Płaszczyzna: na przykład łokiec, sążeń, pręt Kwadratowy. A tak zmierzyc iaki Rektangul, nie co innego jest, jeno determinować liczbę łokci, sążni, prętów &c. Kwadratowych, które zawiera onego Płaszczyzna.

TAB: I.

FIG: 9.

Dla łatwiejszego zrozumienia, pokazmy to w przykładzie: daymy że Rektangul ABCD, ma siedm łokci wysokości, a ośm Bazy: można uważać ten Rektangul jako podzielony na siedm pasów  $a, b, c, d, e, f, g$ , z których każdy zawierać będzie ośm łokci Kwadratowych. Plac tedy Rektangu-

lu

lu wyność będzie siedm razy ośm łokci Kwadratowych, albo 56 łokci Kwadratowych.

Dopiero jeśli sobie przypomnim pierwsze początki rachunku Arytmetycznego, a między innemi i to, że mnożyć liczbę przez liczbę, nie innego nie jest, jak tylko iedną z nich wziąć tyle razy, ile razy iedność zawiera się w drugiej: postrzeżem bez wątpienia doskonałą Analogią czyli podobieństwo między mnożeniem ordynaryną, a operacją, przez którą się mierzy Rektangul. Obaczmy, że mnożąc liczbę łokci, lub sążni &c. które daje wysokość Rektangułu, przez liczbę łokci, lub sążni &c. które daje jego Baza, determinowana będzie liczba łokci albo sążni &c. Kwadratowych, które zawiera Płaszczyzny rozległość.

Miara Rektangułu, jest produkt z wysokości jego, mnożony przez bazę.

*iloczyn*

### XIII.

Figury, które się wymierzać zdarza, nie zawsze tak są regularne jako Rektanguły, których iednakże wymiar jest



jest częstokroć bardzo potrzebny, bo albo będzie szło o determinacyą rozległości jakiego dzieła na placu nie regularnym postawionego, albo też zechce kto wiedzieć, wiele plac nieregularny zawiera w sobie łokci, sążni &c. Potrzeba więc było do sposobu determinowania rozległości Rektangulów, przydać sposób mierzenia figur, które nie są Rektangularne.

Figury prosto-ścienne są te, które się prostemi liniami zamkają.

TAB. I.

Fig. 10.

Fig. 11.

Wiedzieć łącno można, iż w praktyce cała trudność zależy na wymiarzeniu figur prostemi liniami zamkniętych. Bo daymy to, że w obrębie czyli raczey obwodzie jakiego placu znajdują się linie krzywe, jako w figurze ABCDEFG, wiadomo jest, że te linie podzielone na tyle części, ile będzie potrzeba do uniknienia omyłki znaczney, mogą być zawsze wzięte za zbior linii prostych.

Dopieroż jawno jest, że mimo nie-skończoney różności figur prostemi liniami zamkniętych, można wszystkie mierzyć jednym sposobem, dzieląc je na Figury trzema bokami zamknięte,

któ-

które pospolicie Tryangulami zowią: Tryangul jest to figura co się wykona nayprościej i naywygodniej, jeśli od jakiegokolwiek punktu A, obrębu figury ABCDE poprowadzą się linie proste AC, AD, &c. do punktów CD, &c.

Tryangul jest to figura trzema liniami prostemi zamknięta. Trzy kąty

## XIV.

Już tedy ni o co więcej nie idzie, jak tylko o to, żeby wynaleść sposób mierzenia Tryangulów przez rzeczony podział uformowanych. Wiadomo zaś, że sposób naypewniejszy znalezienia tego, czego nie wiemy, jest, szukać, jeśli to co wiemy, niema jakiego związku z tym, co wiedzieć chcemy.

Lecz widzieliśmy już, iż każdy Rektangul ABCD, jest równy produktowi Bazy AB, multiplykowaney przez wysokość CB. Nad to łącno widzieć można, iż ta figura rozcięta Transversal-

TAB. I.  
Fig. 12.

Linia Diagonalna Rektangulu ta jest, która go dzieli na dwa Tryanguly równe.

nie albo na ukos przez linią AC nazwaną Dyagonalną, dzieli się na dwa Tryanguly równe; a ztąd się wnosi, że każdy z tych Tryangulów równa się połowie produktu z onych bazy AB, albo



albo DC, moltiplikowaney przez wysokość CB, albo DA.

Tryanguly  
Rektanguly  
są te, które  
mają dwa  
boki do sie-  
bie wzajem  
Perpendy-  
kularne.

To prawda, że się nie zawsze zdarzają Tryanguly do wymiaru dane, któreby miały dwa boki do siebie wzajem Perpendykularne, jako to mają Tryanguly ABC, ADC, nazwane Tryangulami Rektangularnemi; lecz nie masz, coby przeszkadzało, redukować wszystkie Tryanguly jakiegokolwiek rodzaju, do Tryangulów Rektangulów.

TAB: II.

FIG: I. Jeśli bowiem z punktu A, jako wierzchołku jakiegokolwiek Tryangulu ABC, spuszczone będzie Perpendykularna AD, do Bazy BC, Tryangul ABC będzie rozdzielony na dwa Tryanguly Rektanguly ADB, ADC.

Mając tedy przed oczyma to wszystko, co się dopiero mówiło, wiadomo jest, że ponieważ każdy z dwu Tryan-

Tryangul  
gułów ADB, ADC będzie półową  
jest półową  
Rektangulu  
mającego  
też samą  
bazę i wyso-  
kość, które  
ma Tryan-  
gul,

Rektangulów AEBD, ADCE, Tryangul ABC będzie także półową Rektangulu EBCF, i będzie miał BC za Bazę, a zaś AD za wysokość; a że Płaszczyzna Rektangulu EBCF, będzie

dzie równa produktowi z wysokości E B, albo AD moltiplikowaney przez Bazę BC, Tryangul ABC, będzie miał za miarę połowę produktu z Bazy BC, moltiplikowaney przez Perpendykularną AD, która też jest wysokością Tryangulu.

Zatym miarą Tryangulu jest połowa produktu z jego wysokości moltiplikowaney przez Bazę.

Mamy tedy sposób mierzenia wszystkich Placów liniami prostymi zamkniętymi; ponieważ żadnego nie masz, któryby niemógł być podzielony na Tryanguly, z których wierzchołków iak się inają spuszczać Perpendykularne do Bazów, już jest wiadomo.

## XV.

Ze w sposobie, któryśmy dopiero podali mierzenia Płaszczyzny i rozciągłości Tryangulów, nie są użyte iak tylko onych Bazy i wysokości, bez względu na długość boków: wynika

zstad propozycja albo Theorema następujące: wszystkie Tryanguly, iakie są E C B, A C B mające Bazę wspólną BC, i wysokości równe EF, AD, równe, mają równą Płaszczyznę rozciągłości.

TAB: II.

FIG: 2.

Tryanguly  
mające też  
samą wyso-  
kość i Bazę,  
mają równe  
rościągłości.

C

XVI.



## XVI.

Dla ułatwienia tego, co służy za fundament wyniarów Tryangulów, sądziliśmy, iż nie należało obierać za Bazę innego boku, iak ten-tylko, do którego by się mogła spuścić perpendykularna zwierzchołku naprzeciw onemu leżącego; co się zawsze wykonać może w wymiarach Placów ziemnych; z tym wszystkim ponieważ w komparowaniu Tryangulów, które mają też samą Bazę, perpendykularne spuszczone z wierzchołków, mogą padać za Tryangul, iako w figurze 3; zda się że potrzeba weyrzeć, ieśli Tryanguly takie, iaki jest BCG, są zawsze połową Rektangulów ECBF, które mają perpendykularną GH zawysokość.

TAB: II.

FIG: 3.

Lecz w tym można się łączo upewnić, uważając, że Tryangul CGH składający się ze dwu Tryangulów CGB, GBH, jest połową Rektangulu ECHG, który także składa się ze dwu Rektangulów ECBF, FBHG, a tak dwa

Tryan-

Tryanguly CGB, GBH, wzięte razem czynią połowę Rektangulu ECHG; a że Tryangul GBH, jest połową Rektangulu FBHG; więc rzeczony Tryangul BCG jest połową drugiego Rektangulu ECBF, który ma BC za Bazę, a GH za wysokość.

## XVII.

Propozycja demonstrowana w przeszłych trzech Artykułach, może być wyrażona w tych terminach: Try- TAB: II. anguly EBC, ABC, GBC, są równe, gdy ieno mają Bazę spólną BC, Tryanguly i gdy się znajdują między temi same- mające też same Bazę i mi Parallellami EAG, CBH, to jest: między te- gdy onych wierzchołki wpierają wte- miż samemi parallellami samą linią prostą EAG, Parallellę do zamknięte, linii BC, która służy im za Bazę. Wten- mają równe czas bowiem (Art: XI.) wysokości rozciągło- ich mierzone perpendykularnemi EF, ści. AD, GH, są równe.

## XVIII.

Miedzy różnemi figurami, które się

C2

się



się liniami prostymi zamykają, a mierzone być mogą sposobem dopiero wyłożonym, znajdując się takie, które dochodzą regularności Rektangulów. Są to Płaszczyzny takie, iaka jest ABCD, zamknięte czterema ścianami, z których każda do leżącej naprzeciw siebie jest Parallela. Te figury zowią się Parallelogrammy, i są łatwiejsze do mierzenia nad inne z prostych linii złożone, wyiawszy Rektanguly. Jeśli bowiem Parallelogram ABCD rozdzieli się na dwa Tryanguly ABC, ACD, te będą widomie równe: a że każdy z tych Tryangulów jest połową Produktu z wysokości AF moltiplikowaney przez Bazę BC, więc Parallelogram będzie miał za miarę produkt cały z Bazy BC moltiplikowaney przez wysokość AF.

## XIX.

TAB. II.  
FIG. 6.  
albo 7.

Z tąd idzie, że wszystkie Parallelogrammy ABCD, EBCF, które mają spólną Bazę, i znajdują się między temiż Parallellami, są równe: co łatwo wi-

*Równoległoboki*

TAB. II.  
FIG. 5.

Parallelogrammy są to Figury zamknięte czterema ścianami, z których każda do leżącej naprzeciw siebie jest parallela.

Parallelogrammy równe są produktowi z wysokości onych moltiplikowaney przez Bazę.

widzieć się daie, nawet mimo tego, co się wyżej mówiło, uważając tylko że Parallelogram ABCD zamieni się w Parallelogram EBCF, gdy się mu przyda Tryangul DCF, z figury zaś całej ABCF, odetnie się Tryangul ABE; a tak ponieważ dwa Tryanguly, DCF, ABE wedle suppozycji są równe, widomo jest, że Parallelogram ABCD, nieodmieni swoiey rozciągłości zamieniony w EBCF.

Dla upewnienia się zaś o równości tych Tryangulów, dość będzie uważać, że ponieważ AB, i CD są Parallele, niemniej iako BE, i CF, Tryangul ABE nic innego nie będzie, ieno Tryangul DCF, gdy się na swej Bazie tak posunie, że punkt A przypadnie na D, a zaś E na F.

## XX.

Są ieszcze inne figury liniami prostymi zamknięte, które iacno jest mierzyć, i które nazywają się Polygonami regularnemi; są to figury mające boki równe, i równie do siebie nakłonięne; ta-

Parallelogrammy które mają spólną Bazę, i znajdują się między temiż samemi Parallellami, są równe sobie co do rozciągłości.



Poligony regularne są takie są ABDEF, ABDEFG, ABDEFGH. A ponieważ jest zwy-  
 to Figury zamknięte szcianami różnymi, i różnie do siebie skłonię-  
 TAB: II. przyśkipim do mierzenia onych, trze-  
 FIGURA 8. ba wprzód wiedzieć sposób onych ry-  
 9. i 10. sowania.

## XXI.

Sposób na- Napiszmy Peryferyą iakiego cyr-  
 pisanie Po- kułu, podzielmy onę na tyle części róż-  
 ligonu ma- nych, ile chcemy dać boków Poligo-  
 jącego pew- nowi, na resztę poprowadzmy linie  
 ną liczbę bo- AB, BD, DE, &c, przez punkta A,  
 ków. B, D, E &c. które podziela Poryforyą:  
 a będziemy mieli Poligon żądany, któ-  
 ry się nazywać będzie Pentagonem,  
 Pentagon ma 5. bo- Hexagonem, Heptagonem, Oktogonem,  
 ków, Hexa- gon 6, He- Enneagonem, Dekagonem, wedle te-  
 ptagon 7, go, iako będzie miał albo pięć, albo  
 Oktogon 8, Enneagon 9, sześć, albo siedm, albo ośm, albo  
 Dekagon 10, dziewięć, albo dziesięć, &c, boków.

## XXII.

## XXII.

Do wymierzenia iakiegokolwiek Poligonu regularnego możnaby użyć Wymiar rozciągłości Poligonu regularnego.  
 sposobu, który dla wszystkich figur prostymi liniami zamkniętych inż jest w Artykule XIII podany; wszakże każdy łatwo postrzedz może, że sposób jest naykrótszy, podzielić Poligon na Tryanguly równe, z którychby każdy miał centrum C za wierzchołek. Wziąwszy bowiem ieden z tych Tryangulów na przykład CBD, a przeprowadziwszy do Bazy BD perpendykularną CK, Perpendy-  
 która w tym razie zwać się będzie Per- kul Poligo-  
 pendykulem Poligonu; ponieważ Pła- nu jest to li-  
 szczyzna Tryangulu jest równa pro- nia Perpen-  
 duktowi z Bazy BD moltiplikowaney dykularna z  
 przez połowę perpendykułu CK, ten Centrum fi-  
 produkt wzięty tyle razy, ile Poligon gury do ie-  
 ma boków, da Płaszczyznę figury ca- dnego z bo-  
 łey. ków oney  
 prowadzona.

TAB: II.  
 FIG: 10.

## XXIII.

Niechby Peryferya cyrkułu nie  
 była



*równoboczny*

Tryangul była rozdzielona, iak na trzy tylko części równo-ści, ny jest ten, który ma wszystkie trzy boki równe.

była rozdzielona, iak na trzy tylko części równo-ści, ny jest ten, który ma wszystkie trzy boki równe. Niechby też Peryferya podzielona była na cztery części równe, uformowałby się kwadrat; lecz te dwie figury iako nayprostsze i nayłatwiejsze ze wszystkich Polygonow można łatwo rysować, nieużywając do tego dywizyi cyrkulu; iako się to dało widzieć w Artykule IX. na konstrukcyi Kwadratu. Względem Tryangułu równo-ściennego łatwo jest postrzedz, iż chcąc go odrysować na iakieykolwiek Bazie daney AB, trzeba z punktów A, i B iako z centrów otworem Cyrkla równym Bazie AB, napisać łuki DCF, GCH, dopieroż z punktów A, i B prowadzić linie AC, BC do punktu C, który jest intersekcją spólną łuków DCF, GCH, a wierzchołkiem żądanego Tryangułu.

Sposób napisania tryangułu równo-ściennego,

TAB. II.  
Fig. II.

#### XXIV.

Do tego sposobu, którym się rysują Geometrycznie naypierwsze ze wszystkich

wszystkich Polygonów, to jest Tryangul równo-ścienny, i Kwadrat, mógłbym przyłączyć sposób rysowania Geometrycznie Pentagonu, idąc za przykładem wielu Autorów, lecz poczynając, dla których iedynie to piszę, byłoby bardzo trudno postrzedz ową drogę, której rozum trzymać się musiał, szukając sposobu napisania Geometrycznie tej figury; drogę, którą sama tylko Algebra łatwo odkryć i ukazać może: zda mi się przeto iż opisanie Pentagonu należy odłożyć do Algebry, gdzie się ogulnie traktować będzie o opisaniu wszystkich Polygonów, tych nawet, które mają więcej boków niż Pentagon, i które bez pomocy Algebry niemogą być Geometrycznie rysowane. Z liczby iednak tych Polygonów, o których dopiero mówiliśmy, że niemogą być Geometrycznie rysowane bez rachunku Algebraicznego, wyłączyć należy te, które mają 6, 12, 24, 48, &c. oraz 8, 16, 32, 64, &c. boków. Te bowiem łatwo rysować można Geometrycznie, to jest: temi

D      sposo-



sposobami, które podaie Geomefrya początkowa; iako się to da widzieć przy końcu tej pierwszej części.

XXV.

Wracając się do wymiarów ziemnych widzę, iż częstokroć, te Place, które mierzyć chcemy, są tej natury, że się nie daia użyć operacyom przepisany w sposobach wyżej podanych.

TAB: II.  
FIG: 12.

Niech będzie na przykład ABCDE figura iakiego pola, zwierzyńca &c. którego wymiar jest potrzebny. Wedle tego, co się wyżej mówiło, trzeba by podzielić ABCDE na Tryanguły ABC, ACD, ADE, i one z mierzyć przez spuszczenie perpendykularnych EF, CH, BG; lecz daymy że w rzeczonym Placu znajduie się iaka przeszkoda, na przykład: góra, las, jezioro, &c. któraby przeszkoda niedopuszcila prowadzić linii potrzebnych; cóż w tym razie czynić? iakiego sposobu chwycić się dla ułatwienia tych trudności? sposob naynaturalniejszy, i który się sam na myśl nawia, jest ten: obrać iaki plac

plac równy, a do czynienia wymiarów sposobny i łatwy; na tym placu napisać Tryanguły równe i podobne Tryangulom ABC, ACD &c. Obaczmyż iak mamy postąpić w uformowaniu tych nowych Tryangulów.

XXVI.

Poczniemy od suppozycyi, że ów TAB: III.  
las, góra, lub jezioro do wymiaru prze- FIG: 1.  
szkadzające znajduia się w samym Maiać wiadome trzy  
obrzebie Tryangułu ABC, którego bo- ściany iakiego tryangu-  
ki są wiadome, i któremu równy i po- lu, uczynić  
dobny Tryanguł na Placu obranym inny Tryan-  
ma być napisany. Naprzód tedy pro- guliemu rów-  
wadzić należy linią DE równą Bazie wny.  
AB; dopieroż wziąwszy sznur długo- TAB: III.  
ści BC, i ieden koniec jego utkwivszy FIG: 112.  
w punkcie E, napisać łęk IFG, które-  
go rzeczony sznur promieniem będzie;  
potym drugim sznurem równym bo-  
kowi AC, którego koniec ma być ut-  
kwiony w punkcie D, napisać łęk KFH,  
który przetnie łęk pierwszy napisany  
IFG, na punkcie F. Na koniec popro-  
wadzić linie DF, FE. To uczynivszy  
D2 be-  
plac



będziem mieli Tryangul DEF równy, i zgoła podobny Tryangulowi ABC, iednę z namienionych przeszkod do wymiaru mającemu. Co żadney wątpliwości niepodlega: ponieważ bowiem linie DF, i EF, które się zchodzą u punktu F, są równe liniom AC, BC zchodzącym się u punktu C; nadto ponieważ Baza DE równa jest Bazie AB, rzecz jest niepodobna, żeby pozycja linii DF, i EF względem DE, miała być różna od pozycji linii AC, i BC względem AB. Prawda to, że zamiast linii DF, i EF możnaby wziąć Df, i Ef, na drugiej stronie bazy DE; lecz tym sposobem Tryangul byłby na wspak wywrócony, ale od pierwszego nie różny.

XXVII.

TAB. III.  
Fig. 3.

Gdyby niemożna było zmierzyć, iak dwa tyło ze trzech boków Tryangulu ABC, naprzykład: AB, BC; wiadomo jest, iż niemożnaby było determinować drugiego Tryangulu DEF, który powinien być równy, i zgoła podobny Tryan-

Tryangulowi ABC. Chociażby bowiem wzięto Bazę DE równą Bazie BC, oraz bok DF, równy bokowi BA, nie wiedzianoby jednak iaką dać pozycją bokowi DF, względem Bazy DE. Do ułatwienia tej trudności sposób najnaturalniejszy jest ten: potrafić żeby bok DF, tak zgoła był skłoniony do Bazy DE, iako skłoniony jest bok AB do Bazy BC; albo żebyśmy wyrazili toż samo Geometrycznie: uczynić Angul FDE, równy Angulowi ABC.

TAB. III.  
Fig. 3 i 4.

Angul jest skłonienie się iedney linii do drugiej.

Kąt

XXVIII.

Do wykonania tej operacyi używany bywa Instrument, taki naprzykład, iaki jest *abc.*, złożony z dwu Reguł, któreby się mogły obracać koło centrum *b.* Te gdy się położą na bokach Tryangulu AB, i BC, uczynią ten sam Angul, który zawierają rzeczzone boki AB, i BC. Dopieroż gdy się Reguła *bc* przeniesie i położy na Bazie DE tym sposobem, żeby centrum *b.* zgodziło się z punktem D, a otwor Instrumentu ten sam został, który był pierwey, gdy Reguły

Uczynić angul równy drugiemu.



guły aplikowane były do boków AB i BC; Reguła *ab* determinować będzie pozycją linii DF, która z linią DE uczyni Anguł FDE równy Angułowi ABC. A że cała długość linii AB przez suppozycją wiadoma może się przenieść na linią DF: więc nie nie zostaje, iako przez punkta F, i E, przeprowadzić linią prostą FE, która zamknie Tryangul FED, zgoła równy i podobny Tryangulowi ABC. Ten sposób naturalny i prosty zasada się na oney fundamentalney i przez się widomey prawdzie: że Tryangul zupełnie determinuje się przez długość dwu boków, i przez Anguł między niemi zawarty, albo, co natoż samo wychodzi, że dwa Tryanguły są sobie równe, skoro w nich dwa boki równe są, i równy zawierają Anguł.

Tryangul.  
w którym  
dwie ściany,  
i anguł między  
niemi  
zawarty są  
wiadome,  
jest deter-  
minowany.

## XXIX.

TAB. III. Można by jeszcze uczynić Anguł FDE równy Angułowi ABC, sposobem następującym,

Z cen-

Z centrum B, iakimkolwiek promieniem Ba, napisz łęk *abc*; z Centrum takż D, tąż samą miarą napisz łęk *eif*; co gdy uczynisz, nie zostanie ci, iako szukać punktu *f*, któryby się znajdował na łęku *eif* tak położony, iako punkt *a* na łęku *abc*; łączno zaś ten punkt znajdziesz, używszy linii prostej *ac*, która od Łacińskich Geometrów *chorda*, a od dawnych Polaków zowie się cięciwą. Gdy bowiem z centrum *e*, promieniem równym linii *ac*, napiszesz łęk *lfk*, intersekcya dwu łęków *eif*, *lfk* będzie punktem szukany *f*. Ten znalazłszy, prowadź przez punkta D, i *f*, linią prostą DfF, a będziesz miał Anguł FDE równy Angułowi ABC. Co przez się jest iasno (Art: XXVI.) ponieważ Tryanguły *Bac*, *Dfe*, będą zgoła równe, i podobne sobie co do wszystkich swych części.

Drugi sposób napisania Angułu równego drugiemu.

Chorda. albo cięciwa jest linia prosta mająca spólne końce z kołami albo ośrodkami punktami łęku.

## XXX.

Gdyby ehciano napisać Tryangul TAB, III. FDE równy Tryangulowi ABC, a nie można by było zmierzyć, iak ieden ty-

Fig: 3 i 4.

lo



Dwa Angu-  
ły, i jedna  
ściana de-  
terminują  
Tryangul.

lo bok onego, naprzykład BC, na ów  
czas trzebaby zasięgnąć pomocy od  
Angułow ABC, i ACB, á to w ten spo-  
sób: uczyniwszy Bazę DE równą Ba-  
zie BC, z ostatniech oney punktów D,  
i E, tak poprowadzić linie DF, i EF,  
ażeby z Bazą DE czyniły też same  
Anguły, które czynią AB, i AC, z Ba-  
zą BC. Tak poprowadzone linie DF,  
EF gdy się z sobą zeydą, zamkną Try-  
angul FDE równy i podobny Tryan-  
gulowi ABC. Prawda, na której się  
ta operacya zasadza, tak iest z siebie  
łatwa, że żadney demonstracyi nie po-  
trzebuie.

## XXXI.

TAB: III. Gdyby ze trzech boków Tryangu-  
ła ABC, niemożna było mierzyć, iak  
Fig: 7. tyło Bazę BC, á wiadomo zkąd inąd  
było, że ten Tryangul iest Izoscel, albo  
Tryangul Izoscel iest ten, który  
ma dwie ró-  
wne ściany.  
równoramienny  
rzyć ieden ze dwu Angułow ABC,  
ACB; ponieważ drugi byłby mu równy:  
Przyczynę tego łączno widzieć, sta-  
wiąc

wiąc sobie przed oczy, coby się na ów  
czas zdarzyło, gdyby dwa boki AB, i  
AC, Tryangulu ABC, były położone  
na liniach BD, i CE, które nie innego  
nie są, iak tylko Bazy BC, w iedną i  
w drugą stronę pociągnięcie, dopie-  
roż gdyby znowu tak podniesione były,  
ażby się onych końce zeszyły u punktu  
A; bez wątpienia toby się na ów czas  
trafiło, iż te dwa boki będąc równe,  
musiałyby zbliżając się do siebie prze-  
biec równy przeciąg; więc zszedłszy  
się u punktu A, skłaniałyby się równie  
do Bazy BC: zatym Angul ABC był-  
by równy Angulowi ACB.

Anguły  
w Tryan-  
gule równo-  
ściennym od  
dwu boków  
równych, i  
Bazy zawar-  
te, są sobie  
ró wne.

## XXXII.

Wróćmy się do wymiarów ziem-  
nych. Te uważając widzieć można, iż  
mimo wszystkich tych przeszkod, któ-  
re się w samym obrębie Figur zdarzyć  
mogą, zawsze będzie łączno, sposobem  
wyżey podanym, przeniesć na pole ró-  
wne, á od przeszkod zgoła wolne, wszyst-  
kie te Tryanguly, na które się podzieli  
plac do wymiaru dany.

E

Chciał-



TAB: III. Chciałbyś naprzykład wymierzyć taki las, którego by figura była ABC-  
 FIG: 8. DEFG. Postąpiłbyś w tym razie tym sposobem: na placu obranym uformowałbyś Tryangul równy Tryangulowi ABC, a to mógłbyś wykonać, nie wchodząc zgoła do środka Tryangulu ABC, ale tylko wymierzwszy dwa boki AB, i BC, oraz Angul między nimi zawarty CBA. Ten Tryangul napisany dałby ci Angul BCA, i długość boku AC; a że mógłbyś zmierzyć bok zewnętrzny DC, więc miałbyś już w Tryangule CAD, boki DC, i CA. Co się tycze Angulu DCA, znalazłbyś go

TAB: III. FIG: 8. 19. biorąc naprzód Angul IKL równy Angulowi DCB, potym Angul LKO równy Angulowi BCA: te zostawiłyby ci Angul IKO równy Angulowi DCA.

Determinowawszy tak Tryangul ADC przez dwa boki DC, CA, i przez Angul między nimi zawarty DCA, miałbyś Tryangul DAG, i resztę Figury.

XXXIII.

## XXXIII.

Podany dopiero sposób mierzenia tych Placów, na którychby niemożna było prowadzić linii do wymiaru potrzebnych, wielkim częstokroć i nieprzebytym podlega trudnościom. Rzadko bowiem to bywa, że przy Placu, który mierzyć mamy, znajduie się jakie pole równe, od wszystkich przeszkod wolne, a do formowania Tryangulów równych tym, któreby się na Placu do wymierzenia danym formować miały, dostateczne. A chociażby się i znajdowało, sama wielkość boków może barzo zatrudnić operacye. Spuścić naprzykład Perpendykularną z iakiego punktu na 500 sążni odległego, do iakiey linii, byłaby to robota barzo ciężka a prawie do wykonania niepodobna. Dla uniknienia tych tedy wielkich operacyi, potrzeba mieć inny sposób. Ten sam się poniekąd ofiaruiąc, każdemu przywiedzie na myśl reprezentować figurę ABCDE, o której wymiar idzie, przez podobną figurę *abcde* daleko mnieyszą, w którejby

TAB: IV.

FIG: 1. 12.

E2

na-



naprzykład bok  $ab$  miał 100 calów, jeśli w figurze wielkiej bok  $AB$  ma 10 sążni, a bok  $bc$  45 calów, jeśli  $BC$  ma 45 sążni. Dopieroż wniesć, że jeśli rozciągłość figury małej  $abcde$  zawiera w sobie 60000 calów Kwadratów, rozciągłość figury  $ABCDE$  powinna zawierać 60000 sążni Kwadratowych. Wszakże najpierw wiedzieć należy, na czym się zasadza podobieństwo dwu figur.

## XXXIV.

Naczym za-  
wisto podo-  
bieństwo  
dnu Figur.

Lecz wzięwszy to na uwagę, natychmiast każdy postrzeże, że do podobieństwa figur  $abcde$ ,  $ABCDE$  potrzeba koniecznie, aby Anguły  $A, B, C, D, E$ , figury większej, były równe Angułom  $a, b, c, d, e$ , figury mniejszej; nad to aby boki  $ab, bc, cd, \&c.$  Figury mniejszej tyle zawierały części małych  $p$ , ile zawierają boki  $AB, BC, CD, \&c.$  części wielkich  $P$ .

## XXXV.

Geometrowie chcąc tę drugą kondycją

dycją wyrazić, mówią: że ściany czyli boki  $AB, BC, CD \&c.$ , powinny być proporcjonalne ścianom  $ab, bc, cd \&c.$ ; albo że ściana  $AB$  tylekroć ma w sobie zawierać ścianę  $ab$ , ilekroć ściana  $BC$  zawiera ścianę  $bc$ ; albo że ściana  $AB$  ma być tak wielka względem  $ab$ , iak jest wielka ściana  $BC$  względem  $bc$ ; albo jeszcze że ta sama powinna być relacya między  $AB$ , i  $ab$ , iaka jest między  $BC$ , i  $bc$ ; albo nakoniec że  $AB$  tak się ma mieć do  $ab$ , iak się ma  $BC$ , do  $bc$ ,  $\&c.$  Wszystkie te sposoby mówienia też samę rzecz wyrażają, lecz potrzeba do nich przywyknąć, chcąc Geometrów rozumieć.

## XXXVI.

Widzieliśmy na czym się zasadza podobieństwo dwu figur, obaczmy dopiero, co za sposób podaie nam natura do rysowania figur sobie podobnych. Na ten koniec przypatrzmy się człowiekowi Rysunkiem bawiącemu się, który większą figurę chce przenieść na mniejszą.

Sposob, któ-  
rym się ma ry-  
sować iaka  
Figura po-  
dobna dru-  
gley.

Na-



Naprzód on wziąwszy  $ab$ , dla reprezentowania Bazy  $AB$  w Figurze  $ABCDE$ , którą chce przenieść, tak do  $ab$  nakłania linie  $ae$ , i  $bc$ , iak są nakłonięne  $AE$ , i  $BC$  do  $AB$ , tego zawsze przestrzegając, aby długość  $ae$ , i  $bc$  tak się miała do długości  $ab$ , iako się ma długość  $AE$ , i  $BC$  do długości  $AB$ , to jest: aby ieśli  $AE$  jest naprzykład połową linii  $AB$ , on też uczynił linią  $ae$  równą połowie linii  $ab$ , i aby tymże samym sposobem postąpił w determinowaniu długości linii  $bc$  względem linii  $BC$ .

Dopieroż mając on determinowane punkta  $e$ ,  $c$ , prowadzi dwie linie  $ed$ ,  $cd$ , które tak nakłania do linii  $ea$ ,  $cb$ , iak są nakłonięne linie  $ED$ ,  $CD$ , do linii  $EA$ ,  $CB$ ; a podłużając te linie póty, aż się zbiegą u punktu  $d$ , zamyka i kończy figurę  $abcde$ .

### XXXVII.

Zastanówmy się nieco dopiero nad tą figurą przeniesioną, a pewnie obaczemy, że iej konstrukcyja wspiera się

ra się iedynie na równości, która jest między Angułami  $E$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , i Angułami  $e$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , oraz na proporcyi, która zachodzi między liniami  $EA$ ,  $AB$ ,  $BC$ , a liniami  $ea$ ,  $ab$ ,  $bc$ , tak dalece, że figura zupełnie jest przeniesiona, chociaż nic nieczyniono, żeby Anguł  $d$  był równy Angułowi  $D$ , a linie  $ed$ ,  $cd$  były proporcjonalne liniom  $ED$ ,  $CD$ ; Co mogłoby sprawić wątpliwość, ieśli Anguł  $d$  w rzeczy samey jest równy Angułowi  $D$ , a linie  $ed$ ,  $cd$  proporcjonalne liniom  $ED$ ,  $CD$ , zatym ieśli figura  $abcde$  jest zgoła podobna Figurze  $ABCDE$ ; lecz chociażby niebyło innego sposobu do upewnienia się wtey mierze, samo doświadczenie miałoby tę wątpliwość uspokoić. A do tego za lekkim uważaniem rzeczy, postrzec można, że skoro cztery Anguły  $E$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , równe są czterem Angułom  $e$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , a trzy boki  $EA$ ,  $AB$ ,  $BC$ , są proporcjonalne trzem bokom  $ea$ ,  $ab$ ,  $bc$ , Anguły też  $D$ ,  $d$  muszą być sobie równe, a linie  $ED$ ,  $CD$  liniom  $ed$ ,  $cd$ , proporcjonalne.

Wszak-



Wszakże dla oddalenia wszelkiej wątpliwości, i wszelkiego podeyrzenia, pokażmy: iż wszystkie kondycye, których wyciąga podobieństwo dwu figur, taki z sobą związek mają, że iedne od drugich koniecznie zawisły. Pokazać nam to łącno będzie w Tryangulach, które będąc ze wszystkich Figur nayprostsze, do złożenia wszystkich wcho-  
dzą. Uwaga i roztrząśnienie onych, przy-  
wiedzie nas do poznania wszystkich własności, figur sobie podobnych.

## XXXVIII.

Daymy, że kto na Bazie *ab* rysu-  
ie Tryangul *abc*, biorąc tylo Anguły  
*cab*, *cba* równe Angułom CAB, CBA,  
Tryangulu ABC; naprzód pewni bę-  
dziemy, że trzeci Angul *acb* zrówna  
się trzeciemu ACB.  
Niech bowiem Tryangul *abc* po-  
łożony będzie na Tryangule ABC, tym  
sposobem, żeby punkt *a* przypadł na  
punkt A, takż *ab* na AB, *ac* na AC;  
widomo jest, że linia *cb* będzie Paralle-  
la do CB: a to dla tego, że linia *cb* po-  
dłużona

TAB: IV.  
Fig: 3 i 4.

Jeśli dwa  
Anguły i  
kiego Try-  
angulu rów-  
ne są dru-  
gim dwóm  
angulom in-  
nego Tryan-  
gulu, trzeci  
też Angul w  
pierwszym  
jest równy  
trzeciemu w  
drugim try-  
angule.

dłużona nie mogłaby się zeyść z linią  
CB, chyba, że te dwie linie byłyby do  
AB nie równie skłonięne, a tym samym  
Anguły *cba*, CBA nie równe, co było-  
by przeciwko suppozycyi. Iako z ró-  
wności Angułów *cba*, CBA wynika to,  
że linie *cb*, CB są Parallele, tak z Pa-  
rallelizmu tychże linii wynikać musi,  
że Anguły *acb*, ACB będą równe; a to jest  
cośmy demonstrować przedsięwzięli.

## XXXIX.

Dopiero pokażmy, że boki kor-  
respondujące we dwu Tryangulach *acb*,  
ACB, mających też same Anguły, są  
proporcyonalne.

We dwu  
tryangulach  
mających  
też same an-  
guły, boki są  
proporcyo-  
nalne.

Chcąc tę rzecz gruntowniej uwa-  
żyć, położmy naprzykład, że *ab* jest  
półową linii AB, trzeba będzie poka-  
zać, że *ac* jest też półową linii AC, oraz  
*bc* półową linii BC. Nad to niech Try-  
angul *acb* też samę ma pozycyą w Try-  
angule ACB, którą ma *Acb*, tak iako  
w Artykule przeszłym; na ów czas ie-  
śli się poprowadzi linia *cg* Parallela do  
F AB,

TAB: IV.  
Fig: 3, 14.



AB, wiadomo jest, że ta linia zrówna się linii  $bB$ , albo  $Ab$ , takż  $gB$  linii  $cb$ . A że Anguły  $cgC$ ,  $Ccg$  oczewiście będą równe Angułom  $cbA$ ,  $cAb$ , Tryangul  $Ccg$  zrówna się Tryangulowi  $cAb$  (Artyk: XXX.) Więc linia  $Cc$  będzie równa linii  $Ac$ , takż  $Cg$  linii  $cb$ , albo  $gB$ . Zatem  $Ac$ , albo  $ac$  będzie połową linii  $AC$ , a zaś  $cb$  połową linii  $CB$ .

TAB: IV. Fig: 3, i 5. Jeśli  $ab$  zawierała się trzy, cztery, albo tyle razy, ile się podoba w  $AB$ : byłoby równie łącno pokazać, że  $ac$ , tyleżby się razy zawierała w  $AC$ , a zaś  $cb$  w  $CB$ . Z punktów bowiem  $b, f$ , bazy  $AB$ , poprowadziwszy  $bc, fh$  Parallele do  $BC$ , możnaby położyć wzdłuż linii  $AC$  trzy, cztery, lub więcej Tryangulów  $acb, chg, hCi$  równych Tryangulowi  $acb$ .

TAB: IV. Fig: 3, i 6. Lecz jeśli  $ab$  zamiast tego, coby się miało trzy, lub cztery razy  $\mathcal{E}c$  zawierać zupełnie w  $AB$ , zawierałoby się z jaką frakcją, na przykład pół-trzecia raza: na ów czas dowiodłoby się, że też  $ac$

$ac$  pół-trzecia raza byłoby zawarte w  $AC$ , oraz  $bc$  w  $BC$ .

Chociaż bowiem między Paralelami  $bc, fh$ , położonoby wzdłuż ściany  $AC$ , dwa Tryangule  $Ac b, chg$  równe Tryangulowi  $acb$ , iednak między dwoma Paralelami  $hf, i CB$ , ieszczeby się zostało miejsce dla Tryangulu  $Chi$ , którego boki byłyby połową boków Tryangulu  $cAb$ ; co jest wiadomo, ponieważ przez suppozycją linia  $fB$  byłaby połową linii  $Ab$ , a baza  $hi$  Tryangulu  $Chi$  zrównałaby się linii  $fB$  dla Parallelizmu linii  $hf, i CB$ . Więc ogólnie, skoro we dwu Tryangulach  $ABC, abc$ , też same są Anguły, Tryangule takie zwane od Geometrów podobnemi, mają boki proporecyonalne, albo, co na toż samo wychodzi, ściany  $AB, BC, AC$ , iednego z tych Tryangulów  $ABC$ , tyle zawierają części większych  $P$ , ile ściany  $ab, bc, ac$ , drugiego Tryangulu  $abc$  mają części mniejszych  $p$ . Gdzie się przez Prozumie łokieć, sążeń, pręt  $\mathcal{E}c$ , albo ogólnie iakakolwiek miara do konstrukcyi Tryangulu  $ABC$  użyta, a

F<sub>2</sub> przez



przez  $p$  inna takż miara ze Skali \* łokcie, sążnie, pręty w mniejszych Dymensjach reprezentującej wzięta, której do napisania tryangułu  $abc$ , użyto.

## X L.

Z demonstrowaney dopiero propozycji wynika solucya jednego Problema, częstokroć w praktyce pożytecznego.

Potrzeba naprzykład podzielić jaką linią na pewną liczbę części równych;

\* Skala termin Łaciński od Polskich Geometrów używany znaczy długość wedle upodobania wziętą, a na części coraz mniejsze tym sposobem podzieloną, żeby do reprezentowania miar w kraju pospolitych z mniejszymi onych podziałami, była zgodna. Tak naprzykład linia na pół łokcia lub czwartą tylko część łokcia długa może się podzielić na 10, 15, 20, &c części równych. Z tych pierwsza lub ostatnia gdy się podzieli na 10, a z tych każda jeszcze na 10: linia ta albo raczej Skala może reprezentować w większych swych częściach sznury Litewskie, w mniejszych zaś pręty, a w mniejszych jeszcze, pręciki: ponieważ 10 prętów w sznu-

nych; tobyśmy wprowadzić wykonać mogli szukających na domysł, i omaciem; lecz nigdyby się to nie działo z ową pewnością, którą nam sprawiają Reguły Geometryczne.

Podzielić linią prostą na tyle równych części ile się podobna.

Daymy naprzykład, że linia  $AB$  ma się podzielić na trzy części równe; żeby się to wykonało, naprzód należy prowadzić linią wedle upodobania długą  $AC$ , któraby czyniła iakikolwiek Anguł z linią  $AB$ ; potym iakimkolwiek Cyrkla otworem wyznaczyć na teyże linii

TAB: IV.  
FIG: 5.

sznurze a 10 pręcików w pręcie liczymy. Żeby zaś te Diwizye pewniejszy i znaczniejszy były, Geometrowie zamiast linii biorą parallelogram rektangularny dobrze, podłużony, w którym przez podział boków oraz prowadzenie parallel i Dyagonalnych linii otrzymują Skalę Geometryczną, wygodniejszy mniejsze coraz a mniejsze części miar pospolitych reprezentującą. Takie Skale dają się widzieć w sztukach Matematycznych na regulach mosiężnych, do których mało co przyłożywszy attencyi, iacno każdy widzieć może, że się toż samo wykonywa w rzeczonym Parallelogramie, cośmy wprzód mówili o linii.



linii trzy części równe  $Ac$ ,  $ch$ ,  $hC$ ; na koniec przeprowadzić linią  $CB$ , i do niej paralele  $cb$ ,  $hf$ , przez co linia  $AB$ , na punktach  $b$ , i  $f$  rozcięta, znajdzie się na trzy części równe podzielona; co z Artykułu przeszłego dość jest jasno.

## XLI.

Jeśliby chciano podzielić jaką linią na części, którychby liczbę wyrażał frakt iaki, na przykład dwa i pół, trzy i czwarte &c, albo jeśliby kto sobie w powszechności założył tak rozciąć linią  $AB$  na punkcie  $b$ , żeby  $AB$  tak się miało do  $Ab$ , iako się ma linia  $NO$  do linii  $MQ$ ; wiadomo jest, że solucya tego Problema zawisłaby od Art: XXXIX; to jest że trzebaby przez punkt  $A$ , poprowadzić jaką linią prostą, wziąć na niej części  $Ac$ , i  $AC$ , równe liniom  $MQ$ ,  $NO$ , dopieroż uczynić  $cb$  paralele do  $CB$ ; na ten czas punkt  $b$  byłby punktem żądanym.

Problema, któreśmy dopiero solwowali, Geometrowie inaczej tak wyra-

wyrażają: danym trzem liniom  $NO$ ,  $MQ$ ,  $AB$ , znaleźć czwartą proporcjonalną.

## XLII.

Rzecz jest z siebie widoma, że we dwu podobnych Tryangulach  $ABC$ ,  $abc$  nie tylko boki będą proporcjonalne bokom, ale nad to perpendykuly  $CF$ ,  $cf$ , z wierzchołków  $C$ ,  $c$ , do baz  $AB$ ,  $ab$ , spuszczone, zachowają proporcya boków; co tak łącno jest demonstrować z tego, co się wyżej mówiło, że dłużey nad tym bawić się próżnaby rzecz była.

## XLIII.

Co się tycze rozciągłości podobnych Tryangulów  $ABC$ ,  $abc$ , wiadomo jest, że *area* albo rozciągłość pierwszego tyle zawierać będzie Kwadratów  $X$  napisanych miarą  $P$ , ile *area* drugiego zawierać będzie Kwadratów  $x$  napisanych miarą  $p$ . Ponieważ bowiem  $CF$ , i  $AB$ , iakośmy w przeszłym Artykule



widzieli, tyle będą miały wielkich części  $P$ , ile  $cf$ , i  $ab$  małych części  $p$ ; półowa produktu z linii  $CF$  moltiplikowaney przez  $AB$ , która jest miarą Tryangułu  $ABC$ , (Artyk: XIV:) da też samę liczbę, którą da miara Tryangułu  $abc$ , albo półowa produktu z linii  $cf$  moltiplikowaney przez  $ab$ ; z tą jednak różnicą, że, ponieważ  $DF$ , i  $AB$  liczą się w częściach  $P$ , produkt onych liczyć się będzie w Kwadratach  $X$ ; a że  $cf$ , i  $ab$ , liczyć się mają w częściach  $p$ , więc dadzą produkt, który się liczyć będzie w Kwadratach  $x$ .

## XLIV.

To cośmy mówili o mierze Tryangułów podobnych, służy za dowód iedney propozycji, która w Elementach Geometrii tak się poſpolicie wyraża:

Piaſzczy tryangułów podobnych mają się do siebie, iak Kwadraty boków korrespondujących. Jeśli dwa tryanguły  $ABC$ ,  $abc$  są sobie podobne: tak się ma Tryanguł  $ABC$  do Tryangułu podobnego  $abc$ , iak się ma Kwadrat  $ABDE$  boku  $AB$  do Kwadratu  $abde$  boku korrespondującego  $ab$ .

Ta konſekwencya koniecznie wynika

nika z demonſtracyi w Artykule przeſzłym zawartej. Ponieważ bowiem Kwadrat  $ABDE$  tyle w ſobie zawiera wielkich Kwadratów  $X$ , ile zawiera  $abde$  Kwadratów małych  $x$ , widomo ieſt, że dwie liczby Kwadratów  $X$ , które wyrażają relacyą Tryangułu  $ABC$  do Kwadratu  $ABDE$ , są równe liczbowom Kwadratów  $x$ , które ukazują relacyą Tryangułu  $abc$  do Kwadratu  $abde$ ; albo, co na toż ſamo wypada, że Tryanguł  $ABC$  tak się ma do Kwadratu  $ABDE$ , iako Tryanguł  $abc$  do Kwadratu  $abde$ .

Ztąd idzie, że ieſliby na przykłąd bok  $AB$  był we dwoie więkſzy za bok  $ab$ , Tryanguł  $ACB$  byłby we czworo więkſzy za Tryanguł  $acb$ ; a ieſliby bok  $AB$  był trzy razy więkſzy za bok  $ab$ , Tryanguł  $ACB$  byłby dziewięć razy więkſzy za Tryanguł  $acb$  &c, ponieważ bok  $AB$  nie może być we dwoie więkſzy za bok  $ab$ , żeby tym ſamym kwadrat  $ABDE$  nie był we czworo więkſzy za Kwadrat  $abde$  &c.



## XLV.

Zebyśmy od Tryangulów postąpi-  
li do innych figur, położmy, że do  
TAB: IV. każdego że dwu Tryangulów podo-  
FIG: 1, i 2. bnych ABD,  $abd$  są przyłączone dwa  
inne Tryanguły ADE, i BDC,  $ade$ , i  $bdc$ ,  
z którychby dwa pierwsze były podo-  
bne dwu drugim; obaczemy, iż w całych  
figurach ABCDE,  $abcde$ :

Własności  
Figur podo-  
bnych wyni-  
kające z wła-  
sności Try-  
angulów  
podobnych.

1. Anguły A, B, C, D, E, będą ró-  
wnie Angułom  $a, b, c, d, e$ ; co jest wido-  
me, ponieważ i pierwsze, i drugie będą  
albo Angułami korrespondującemi Try-  
angulów podobnych, albo Angułami  
z tych angułów korrespondujących zło-  
żonemi.

2. Relacya zachodząca między  
ścianami korrespondującemi DE,  $de$ ,  
BC,  $bc$  &c. Figur ABCDE,  $abcde$ ,  
będzie taż sama, to jest: jeśli P, naprzy-  
kład, tyle razy zawiera się w bazie AB,  
ile razy  $p$  znayduie się w  $ab$ , tedy P tyle  
razy w każdym boku figury ABCDE  
znaydować się musi, ile razy  $p$  w każ-  
dym zboków korrespondujących Figu-  
ry

ry  $abcde$  zawarte będzie. Dla podo-  
biństwa bowiem Tryangulów ABD,  
 $abd$ , liczba części P składających ścia-  
nę AD zrówna się liczbie części  $p$  za-  
wartych w  $ad$ . Dopieroż jeśli te ścia-  
ny wzięte będą za Bazy Tryangulów  
podobnych ADE,  $ade$ , liczba części P  
zawartych w DE zrówna się liczbie  
części  $p$ , które zawierać będzie ściana  
 $de$ .

3. Jeśli by we dwu rzeczonych fi-  
gurach poprowadzono linie sobie korre-  
spondujące, iakie są CE,  $ce$ , albo per-  
pendykularne DF,  $df$  &c; te linie mia-  
łyby do siebie też samą relacyą, która  
zachodzi między bokami korrespondu-  
jącemi tych dwu figur.

Więc figury ABCD,  $abcd$ , co do  
wszystkich swych części będą sobie  
podobne.

## XLVI.

Gdy figura  $abcde$  tak się napisze,  
że będzie figurze ABCDE doskonałe  
podobna, wiadomo jest, że chcąc odry-  
sować inną jeszcze figurę, figurze  $abcde$   
G2 zgo-



zgoła równą, a zatym figurze ABCDE także podobną, byłoby próżno mierzyć wszystkie ściany i wszystkie Anguły rzeczoney figury *abcde*, ale byłoby dosyć wziąć trzy ściany *ab*, *ea*, *bc*, i cztery Anguły *e*, *a*, *b*, *c*, ato mając, możnaby się ubeśpieczyć, że nowa figura będzie równa figurze *abcde*, a do ABCDE podobna. Co służy za demonstracją zupełną tego, co w Arktykule XXXVII, na doświadczeniu raczey, niż na dowodzie Geometrycznym zasadzono było.

Te uwagi możnaby daley rozszerzyć; iasna bowiem rzecz iest, iż wedle rozmaitości figur, rozmaicie może być kombinowana liczba angułów i linii, które muszą być koniecznie wymierzone w iedney figurze, skoro druga tak ma być napisana; żeby iey była proporcjonalna; ale zachodzić tak daleko, byłoby to niepotrzebnie czytelnika trudzić.

## XLVII.

Możnaby demonstrować tymże samym sposobem, co w Artyk: XLIII; że

że liczba Kwadratów X, które zawiera figura ABCDE, równa się liczbie Kwadratów  $x$  w figurze *abcde* zawartych; a zatym że płaszczyzny figur podobnych tak się mają do siebie, iako się mają do siebie Kwadraty boków korrespondujących.

Płaszczyzny Figur podobnych tak się mają do siebie, iako się mają do siebie Kwadraty boków korrespondujących.

## XLVIII.

Wszystko to, co się o figurach podobnych do tych czas mówiło, zamknąć można w tey iedney powszechney propozycji: że figury podobne niczym od siebie nieróżnią się, iak tylko różnością Skal, wedle których są napisane.

Figury podobne niczym od siebie nieróżnią się, iak tylko różnością Skal, wedle których są napisane.

## XLIX.

Dopiero, żebyśmy lepiey zrozumieli, iak mają być użyte tryanguły podobne i redukcye figur wielkich do mniejszych, w przeszłych Artykułach opisane, gdzie idzie o wymiar placów, któreby do operacyi Geometrycznych niewygodne były, imaginuemy sobie, iż ABCDEF reprezentuie obręb iakie-

go



TAB: V.  
Fig: 1, i 2.

go ogrodu, albo ieżiora &c, którego by chciano determinować rozciągłość; naprzód zmierzyć należy którąkolwiek ścianę figury, naprzykład FE, i obaczyć wiele ona będzie zawierać sążni, prętów &c, dopiero obrawszy wedle upodobania Skale, (ARTYK: XXXIX:) na kartonie lub papierze napisać linią *fe*, któraby tyle zawierała części wziętych ze Skali, ile FE zawierać będzie sążni, prętów &c; potem uczyniwszy Anguły *def*, *dfe*, równe Angułom DEF, DFE, napisać Tryangul *edf*, i w nim spuścić perpendykularną *eg* do bazy *df*; co gdy się stanie, wzięwszy ze Skali miarę linii *df*, i *eg*, można będzie wnosić, że, ile te linie zawierać będą części redukowanych, albo ze Skali wziętych, tyle DF, i EG będą miały sążni, prętów &c. A tak moltiplikując DF przez półowę perpendykularney EG, znajdzie się Area Tryangulu EDF; na resztę, wymierzając tymże sposobem każdy z osobna tryangul DCF; BCF, ABF, znajdzie się area całej figury.

L.

L.

Często się w praktyce nadarza Sposób mierzenia odległości potrzeba wymierzania odległości stacyi F, od innego iakiego miejsca, dla główności iakiego miejsca nieprzytępnego. zawad nieprzytępnego; nowec to zda się być Problema, wszakże solucya onego wcześniej iuż w Artykule przeszłym iest dana. Ponieważ bowiem do mierzenia odległości DF, niczego więcej, prócz podobieństwa Tryangulów *def*, DEF niebyło potrzeba, widomo iest, że skoro którakolwiek baza EF iest wymierzona, a z punktów E, i F można widzieć punkt niedostępnny D, iuż tym samym Problema iest solwowane, to iest, znajduie się odległość FD.

L I.

Wużywaniu Instrumentów takich, TAB: V. Fig: 3. iaki iest *bAc*, który, iakośmy w Artyk: XXVIII, opisali, składa się że dwu Regułu u punktu A spoionych, i koło niego wolnie chodzących, częste się nadarza ią omyłki, iuż to, że wzięty angul zmieni się



ni się w przenoszeniu, już to że kształt Instrumentu, który mu dać potrzeba, żeby do praktyki, a mianowicie do ziemnych wymiarów był zgodnym, uczyni go do redukcji; to jest do przenoszenia pełnych Angułów na kartę, niewygodnym.

A do tego każdy Anguł  $BAC$  tym sposobem wzięty, wyciąga, aby znowu Instrument był przeniesiony na papier, tak dalece, że do skomparowania dwu Angułów, iedyny sposób jest, kłaść ieden Anguł na drugim; lubo i to Angułów złożenie nie da onych ani relacji, ani wielkości absolutney.

## LII.

Było zatym potrzeba, ażeby iako przedtym do determinowania długości, tak dopiero do mierzenia Angułów, pewney poszukano miary; tę zaś nietrudno wynaleść było: albowiem jeśli do reguły  $Ab$ , która niema się obracać, będzie naprzód aplikowana reguła  $Ac$ , dopieroż koło punktu  $A$  obracana, jasno jest, że przyprawione do iey końca

TAB: V.

Fig: 4.

ca  $c$ 

ca  $c$  pióro lub ołówek naznaczy drogę punktu  $c$ , która formując łęk Cyrkułu, da miarę Angułów rozmaitemu rozwarciu reguł  $Ab$ ,  $Ac$  korrespondujących, to jest, iż dla iednostayney Cyrkułu krzywości, musi to być koniecznie, że różnemu rozwarciu reguł, na przykład we dwoie, we troie, we czworo większemu, niż jest  $cAb$ , korrespondować będzie łęk we dwoie też, we troie, we czworo większy za  $bc$ .

## LIII.

W suppozycji więc, że Peryferya  $bcdfg$  całą rewolucyą lub obwodem punktu  $c$  napisana, podzielona jest na pewną liczbę części równych, liczba części zawartych w łęku odciętym przez linie  $Ac$ , i  $Ab$ , będzie zupełną miarą rozwarcia tychże linii, albo angułu  $cAb$  przez one uformowanego.

Geometrowie zgodzili się na to powszechnie, żeby cyrkuł dzielił się na 360 części, które się zowią gradusami, gradus na 60 minut, a każda minuta na 60 sekund &c. A tak na przykład Anguł

H

guł

60.

Angułu  
miarą jest  
łęk cyrkułu  
między iego  
bokami zawarty.

Cyrkuł  
dzieli się na  
360 gradusów,  
a każdy gradus na  
60 minut



guł  $bAc$  będzie miał 70 gradusów, i 20 minut, ieśli łęk  $bc$ , który mu służy za miarę, ma 70 trzechsetnych sześćdziesiątych części cyrkułu, i nad to 20 sześćdziesiątych części iednego gradusa.

## LIV.

TAB: V. Ztąd idzie że Anguł 90 gradusów, Fig: 5. poſpolicie Angulem proſtym zwany, ieſt ten, którego boki  $AC$ , i  $AB$  zawierają kwadrans  $BC$ , albo czwartą część Peryferyi, a są do ſiebie perpendykularne.

## LV.

Anguł ostry ieſt mniey- Anguł mnieyſzy niż proſty, albo ſzy niż pro- mniey niż 90 gradusów mający, zowie ſię Angulem ostrym, takie są Anguły TAB: V. Fig: 6.  $CAB$ ,  $FAG$ ,  $EAG$ .

## LVI.

Anguł tępy Przeciwnie Anguł tępy ieſt ten, więkſzy ieſt który ma więcey niż 90 gradusów, i a- niż proſty. ko  $FAB$ .

## LVII.

## LVII.

Iasna rzecz ieſt, że wſzytkie An- Suſna wſzy- guły  $GAF$ ,  $FAE$ ,  $EAC$ ,  $CAB$ , tkich Angu- które z iedney ſtrony linij  $GB$  leżąc tów mają- cych ſpolny wierzcho-łek, które ſię razem wzięte równe są 180 gradusom, zmieſcić mo- gą z iedney ſtrony linij proſtey, czy- ni 180 gra- dusów.

## LVIII.

Iawno takież, iż ſumma wſzytkich TAB: V. Fig: 7. Angułów  $EAF$ ,  $FAB$ ,  $BAC$ ,  $CAD$ , Suſna wſzy-  $DAE$ , uformowanych koło punktu  $A$ , tkich Angu- tów, które ſię uformo- wać mogą koło iakiego punktu, rów- na ieſt czterem Angułom, których miarą ieſt cała Peryferya  $BCDEF$ , rem Angu- lom pro- ſtym.

## LIX.

Stanowiący na tym, że części Cyr- kułu ſłużą za miarę Angułom, obaczmy iak mamy poſtąpić, gdy będzie potrze- ba determinować liczbę gradusów w Angule iakim do mierzenia danym.

H<sub>2</sub> Do



TAB: V. Do tey operacyi pospolicie używa-  
 FIGURA 8. ny bywa Instrument I, który się zowie  
 półcyrkulem mierniczym, \* składa się  
 z dwu reguł EAC, DAB, równey  
 długości, które się przecinaia u punktu  
 A, a na końcach maia Dyoptry, to jest  
 ucha nakształt słupków płaskich, do  
 tychże reguł perpendykularne, z rysa-  
 mi wtkroś idącemi, a do brania na cel  
 obiektów zgodnemi.

Iedna z tych reguł EC zwana Ali-  
 dadą, obraca się koło centrum A, dru-  
 ga DB będąc nierozdzielnie spoiona z  
 półcyrkulem DCB na 180 gradusów  
 podzielonym, służy mu za Dyameter,  
 i bez poruszenia całego Instrumentu  
 zgoła jest nieobrótna.

Chcąc tedy zmierzyć wielkość  
 Angułu, który zawieraia linie proste  
 prowadzone z iakiego mieysca do dwu  
 obiektów F, G: naprzód tak postawie  
 nale-

\* Francuzi nazywaią ten Instrument Grafome-  
 trem. Anglicy całego pospolicie używaią  
 Cyrkuła, i zowią go Teodolidem. Ogulnie In-  
 strument do mierzenia Angułów służący zwać  
 się ma Goniometrykiem.

należy Instrument, żeby centrum iego  
 znajdowało się na mieyscu danym, a  
 przez Dyoptry D, i B reguły DB, od  
 oka będącego na punkcie D, widziane  
 było iedno że dwu obiektów F; dopie-  
 roż niewzruszaiąc Instrumentu, póty  
 obracać trzeba Alidadę EC, aż dru-  
 gie obiektum G, przez Dyoptry E, i C  
 postrzeżone będzie z punktu E, na któ-  
 rym znajduje się oko. Co gdy się sta-  
 nie, Alidada na półcyrkule mier-  
 niczym ukaże gradusy, minuty &c,  
 które zawiera Anguł GAF do mierze-  
 nia dany.

## LX.

Do napisania na karcie iakiegokol-  
 wiek Angułu, maiącego pewną liczbę  
 gradusów, używany pospolicie bywa  
 Instrument K, Transportatorein zwa-  
 ny, a na 180 gradusów podzielony; ten  
 gdy się tak na karcie położy, żeby cen-  
 trum A z punktem, który ma być wierz-  
 chołkiem żadanego Angułu, a bok albo  
 promień AB z linią ABG, to jest z ie-  
 dnym bokiem Angułu wcześniej napi-

Co to jest  
 Transporta-  
 tor, i iak ma  
 być użyty  
 do napisania  
 Angułu mai-  
 ącego pew-  
 ną liczbę  
 gradusów?

TAB: V.  
 FIG: 9.

sa.



sany, zgodzone były: niezostanie więcej, iak naznaczyć na karcie punkt C korresponduiący liczbie gradusów w Angule żądanym zawartych, a na łęku rzeczonoego Instrumetu liczonych. Linja bowiem ACO przez ten punkt prowadzona, z linią ABG zamknie Anguł OAG, który zawierać będzie daną gradusów liczbę.

## L X I.

TAB: VI.  
Fig: 1, 1 a. Położmy dopiero, że kto poprowadziwszy na karcie bazę FG, chce na niej postawić Tryangul FGH, podobny Tryangulowi ziemnemu ABC. Naprzód musi on użyć Grafometru w Artykule LIX opisanego, dla zmierzania Angułów CAB, CBA, ażeby wiedział, wiele z nich każdy zawiera gradusów; potym za pomocą Transportatora musi napisać Anguły HFG, HGF, równe z osobna angułom CAB, CBA; dopieroż ponieważ przez tę operacyą tak punkt H, u którego zeydą się boki FH, GH, iako też Anguł FGH muszą być koniecznie determinowa-

nowane, Tryangul FGH będzie zgoła podobny Tryangulowi ABC.

## L X I I.

Ponieważ wiele na tym zależy w praktyce, iakośmy wyżej mówili, aby Anguły iak naysilniey mierzone były: nie trzeba się więc tym kontentować, żeśmy one wzięli, byteż naydoskonalszymi Instrumentami: należy ieszcze znaleźć sposób, którymby wymiary onych weryfikowane, i poprawione być mogły, iesliby iaka w nich omyłka postrzeżona była. Ten sposób prosty jest i łacny, uważmy go w Tryangule ABC.

Naprzód każdemu w oczy wpada, TAB: VI.  
Fig: 1. że wielkość Angułu C zawisła od wielkości Angułów A, i B; skoro bowiem te Anguły byłyby powiększone lub zmniejszone, natychmiast odmieniłaby się pozycya linii AC, i BC, a zatym i Anguł C od tych linii zawarty. Dopieroż iesli ten Anguł dependuje od wielkości Angułów A, i B, należy rozumieć, że ta liczba gradusów, którą zawiera-



zawierają Anguły A, i B, musi determinować liczbę gradusów, którą zawierać powinien anguł C, a tym samym może służyć on za weryfikacją operacyom, któreby czynione były dla determinowania Angułów A, i B; pewna bowiem rzecz będzie, że anguły A, i B, dobrze są wymierzone, jeśli w Angułe C wymierzonym potym, znajdzie się liczba gradusów, którą on mieć powinien w proporcji wielkości Angułów A, i B.

Zebyśmy wiedzieli, iak determinować można wielkość Angułu C, z wielkości Angułów A, i B, uważmy coby się działo z Angułem C, gdyby linie AC, i BC odmieniły pozycyą swoię, zbliżając się, albo się oddalając jedna względem drugiej. Daymy na przykład że BC obracając się koło punktu B oddala się od AB, a zbliża się ku BE; iawno jest, iż póki by się obracała linia BC, póty by się rozwierał Anguł B, a przeciwnie Anguł C coraz by się ścieśniał; z czego by natychmiast można wnosić, że w tym razie pomniejszenie Angułu C, byłoby równe powiększeniu

TAB: VI.  
Fig: 3.

fzeniu angułu B, a zatym summa trzech Angułów A, B, C, byłaby zawsze taż sama, iakobykolwiek linie AC, BC do linii AE, skłoniene były.

## LXIII.

Wszakże toż samo, co z uważania linii BC, obracaney koło punktu B, wnieść się przez indukcyą mogło, może też być pewnie i ogólnie demonstrowano.

Poprowadźmy bowiem ID paral-  
lelę do AC, naprzód obaczemy, że Anguły ACB, i CBD, które się zowią ukośnemi (po łacinie Alterni) będą sobie równe. Co jest widomo; linie bowiem AC, i IB tym samym że są par-  
allelę, będą równie do CBO skłoniene, zatym Anguł IBO będzie równy Angułowi ACB. Lecz Anguł IBO zrówna się też angułowi CBD, przeto że linia ID rości naiać linią CO na punkcie B, nie więcej skłonioną będzie do niey z jedney strony, iako z drugiej. Więc Anguł DBC równy Angułowi IBO, zrówna się też ukośnemu ACB.

TAB: VI.  
Fig: 4.  
Anguły ukośne są te, które się formują z obu stron linii przecinającej dwie parallele.

Te anguły są sobie równe.

I LIV.



## LXIV.

Obaczemy powtórę, że ponieważ linie CA, i DB są paralele, Anguł CAE będzie równy Angułowi DBE. Więc Anguł ACB mieysce Angułu CBD, a zaś Anguł CAB plac Angułu DBE zgoła zastąpić, a tym samym wszystkie trzy Anguły Tryangułu ACB obok z sobą leżeć i u punktu B wierzchołkami swemi zeyśćby się mogły, gdyby ie zgromadzić i w iedno złączyć chciano; i na ów czas ukazałoby się na oko, że trzy Anguły CAB, ACB, CBA Tryangułu ACB będąc równe trzem Angułom DBE, CBD, CBA, byłyby też równe dwum Angułom prostym (ARTYKUŁ LVII.); a że wszystko to, co się dopiero mówiło, może być aplikowano do każdego Tryangułu, więc upewnić się należy o tey powszechney własności Tryangułów; że summa trzech Angułów iakiegokolwiek tryangułu, iest zawsze też sama, i dwum Agułom prostym, albo, co na toż samo wychodzi, 180 gradusom równa.

Summa  
trzech angu-  
łów w każ-  
dym Tryan-  
gule równa  
iest dwu an-  
gułom pro-  
stym.

LXV.

## LXV.

Gdy tedy wymierzone, lub zkaąd inąd wiadome będą dwa Anguły iakiegokolwiek Tryangułu, żeby walor trzeciego z nich był determinowany, nie trzeba będzie iak tylko od 180 gradusów odciąć summę dwu wiadomych Angułów. Ta więc powszechna własność Tryangułów podaie sposób barzo wygodny weryfikowania mierzonych Angułów iakiegokolwiek Tryangułu; własność, którey niezliczone pożytki obaczemy, gdy daley postąpim. My się kontentować będziemy wniesieniem tych konsekwencyi, które się same narażać zdaia.

## LXVI.

Tryanguł niemoże mieć więcej nad ieden Anguł prosty, a tym barziej nad ieden Anguł tępy.

12 LXVII.



## LXVII.

Jeśli ze trzech Angułów w jakim Tryangule jeden jest prosty, summa dwu innych czyni drugi Anguł prosty.

Te dwie propozycje są tak jasne, że demonstracyi niepotrzebują.

## LXVIII.

TAB: VI.

FIG: 4.

W każdym Tryangule Anguł zewnętrzny równy jest dwóm Angułom wewnętrznym na przeciw leżącym.

Jeśli w Tryangule ABC, jeden z boków na przykład AB będzie daley pociągniony; Anguł zewnętrzny CBE równa się summie dwu angułów wewnętrznych naprzeciw lemu leżących BCA, CAB: czy to bowiem dwa Anguły BCA, CAB, czy to Anguł CBE przydane będą do Angułu CBA, summa zawsze będzie równa 180 gradusom, albo dwu Angułom prostym (ARTYK: LXIV.)

## LXIX.

W tryangule Izoscelu albo dwa boki równe mającym, tym samym że jeden Anguł jest wiadomy, dwa też inne wiadome są.

Niech

Niech będzie wiadomy Anguł na przykład A, iawnno jest, iż gdy się ode-  
tnie liczba gradusów w nim zawartych od 180 gradusów, albo dwu Angułów prostych, które są trzech Angułów miarą w każdym Tryangule, reszta na puł rozdzielona, będzie równa każdemu z osobna Angułowi B, i C.

Niech też wiadomy będzie jeden z Angułów B, C; summa onych od 180 gradusów odcięta, da nam Anguł A.

## LXX.

Ponieważ tryangul równo ścienny jest razem Izoscelem, a każdy w nim ze trzech boków może służyć za bazę; wiadomo jest, że w nim wszystkie trzy Anguły są koniecznie równe, a zatym każdy z nich czyni 60 gradusów, albo trzecią część dwu Angułów prostych.

## LXXI.

Zkąd wynika łączna konstrukcyja He-  
xagonu, albo Poligonu od sześciu boków, którąśmy dać obiecali w Art: XXIV.

Chcąc



Chcąc albowiem znaleźć linią, któraby dzieliła peryferyą na sześć równych części, trzebaby żeby ta linia była cięciwą łęku 60 gradusów, to jest, szóstey części 360 gradusów, albo całej peryferyi. Biorąc zatym AB za takową cięciwę, a z centrum I, prowadząc do końców oney A, i B, promienie AI, IB, anguł AIB będzie miał 60 gradusów, a że dwa boki AI, i IB, będą w tym razie równe, Tryanguł też AIB będzie Izoscelem. Ponieważ tedy Anguł u wierzchołka ma 60 gradusów, więc każdy z dwu innych będzie takóž miał 60 gradusów, albo półowę 120; więc Tryanguł AIB (Art: LXX.) będzie równościennym, a linia AB równą promieniowi cyrkułu. Zkąd idzie, że do napisania Hexagonu, trzeba będzie otworzyć cyrkiel wedle długości promienia, i onę sześć razy na peryferyą przenieść dla napisania sześciu boków Hexagonu.

TAB: VI.  
Fig: 6.

LXXII.

## LXXII.

Mając napisany Hexagon, łatwo napisać Dodekagon, albo poligon od 12 boków.

Gdy się bowiem łęk AKB, albo Anguł AIB, rozdzieli na dwie części, cięciwa AK półowy łęku AKB, będzie iednym z boków Dodekagonu.

Półowa angułu w centrum Hexagonu daie cały Anguł Dodekagonu.

## LXXIII.

Chcąc zaś rozdzielić łęk AKB na dwa łęki równe AK i KB; trzeba toż samo czynić, coby się czynić miało dla podziału cięciwy AB na dwie części równe; to jest, z punktów A, i B iako z centrów, iakiunkolwiek otworem cyrkuła, napisać łęki MLN, OLP, a przez punkt L, na którym się te dwa łęki przetną, oraz przez centrum I, poprowadzić linią LI: ta rozdzieli na dwoie tak łęk AKB, albo Anguł AIB, iako cięciwę AB.

Rozdzielić łęk albo anguł na dwoje.

LXXIV.



## LXXIV.

Sposób na-  
pisania Po-  
ligonów od  
24, &c, bo-  
ków.

Jeśli tym sposobem, któregośmy  
teraz użyli do konstrukcyi Hexagonu i  
Dodekagonu, łęk AK rozdzieli się ie-  
szcze na dwa łęki równe, iednego z nich  
cięciwa będzie bokiem poligonu od 24  
boków; a podobnie czyniąc dalej, mo-  
żna mieć poligony od 48, 96, 192, &c.  
boków.

## LXXV.

Sposób na-  
pisania okto-  
gonu.

Dopieroż chcąc napisać Oktogon,  
to jest, poligon 8 boków, mamy naprzód  
w Cyrkule odrysować Kwadrat; co ła-  
cno wykonamy, gdy poprowadziwszy  
TAB: VI. dwa Diametry AIB, CIE wzajem do  
FIG: 7. siebie perpendykularne, końce onych  
złączemy przez linie AC, CB, BE,  
EA. Regularność albowiem cyrkulu, i  
równość czterech angułów, przez per-  
pendykuty AIB, CIE uformowanych,  
to sprawia, że cztery boki AC, CB,  
BE, EA, będą sobie koniecznie równe,  
i równie do siebie skłonięne; co nie in-  
nym figurom, ieno samym kwadratom  
służy. Ma-

Mając tak napisany kwadrat, gdy  
sposobem przerzeczonym każdy z łę-  
ków CKB, BLE &c przedzielimy na  
dwie równe części, otrzymamy Okto-  
gon CKBLEMAN.

Jeśli zaś dalej dzielić zechcemy  
łęki CK, KB, &c na 2, 4, 8, równych  
części, znajdziemy poligony od 16, 32, 64, &c boków.

Sposób na-  
pisania Po-  
ligonów od  
16, 32, &c  
boków.



K

PO.





# POCZĄTKI GEOMETRYI.

## DRUGA CZĘŚĆ

*O sposobie Geometrycznym kom-  
parowania Figur prosto-  
ściennych.*



IESLI SIĘ to uważało, cośmy  
do tych czas mówili,  
ukazując sposoby, przez  
które naynaturalniey lu-  
dzie przyszli do wymiarów ziemnych,  
miałoby się postrzedz, że pozycye linii  
iednych względem drugich, dawały im

K 2      oka-



okazyją do rozmaitych uwag, przez się same ciekawości i rozmyślania godnych, nawet mimo tych pożytków, którychby się w praktyce spodziewać z ónych należało. I takie bez wątpienia uwagi powodem były dawnym Geometrom do dalszych zapędów w rozmyślaniu, i dośkonaleń swych wynalazków. Albowiem nie same tylko potrzeby i pożytki determinują ludzki umysł, częstokroć ciekawość jest równie wielką dla niego pobudką do pracownitego nowych rzeczy szukania.

Nie mało też pomódz musiała do wzrostu Geometrii wrodzona ludzkiem chęć owej precyzji, którąbyśmy we wszystkich dziełach radzi widzieli, i bez której nigdy rozumowi zadość uczynić niemożna.

Przetóż gdy wymierzaiąc Figury postrzeżono, że częstokroć Skale i Grafometry niedawały prawdziwey wielkości mierzonych linii i Angulów, natychmiast szukano sposobów, przez któreby niedośkonłość tych Instrumentów nadgrodzić, a omyłek uniknąć można było. My

My tu wróciemy się znowu do figur prosto-ściennych; lecz w operacyach, które czynić będziemy, dla odkrycia, i ukazania prawdziwey iednych figur względem drugich relacyi, nie użyjemy iak tylko reguły i cyrkla.

Zdarza się częstokroć potrzeba, albo złożenia w iedną figurę wielu innych oney podobnych, albo podzielenia iedney na wiele innych tegoż rodzaju; co nayłatwiej wykonać można za pomocą rektangulów; ponieważ wszystkie figury prosto-ścienne nie innego nie są, ieno zbiorem Tryangulów, każdy zaś Tryangul jest półową rektangulu, który ma też samę z Tryangulem wysokość i bazę.

## I.

Zeby się rektanguly komparować z sobą mogły, trzeba wiedzieć iak się ma zamienić iakikolwiek rektangul na inny, któryby mając też samę rozciągłość, miał inną wysokość. Gdy bowiem dwa rektanguly, będą zamienione na dwa inne tej samey wysokości, ró-



różnić się nie będą iak tylko bazami; ten będzie z nich naywiększy, który będzie miał naywiększą bazę, i tyle razy mnieyszy zawierać się będzie w większym, ile razy baza mnieysza zawiera się w większey; co się pōspolicie tak wyraża: dwa rektanguły mające tēż samę wysokość, są do siebie iako onych bazy.

Dwa rektanguły mające tēż samę wysokość są do siebie iako onych bazy.

## II.

Chcąc złożyć w iedno dwa takie rektanguły, niepotrzeba iak tylko obok onę z sobą położyć.

## III.

Nie większa tēż trudność będzie odciąć mnieyszy rektanguł od większego.

## IV.

Mając podzielić iaki rektanguł na pewną liczbę rektangułów równych, trzeba podzielić onego bazę na taką liczbę równych części, a z punktów diyizyi podnieść perpendykularne.

## V.

## V.

Polóźmy dopiero, że rektanguł TAB: VII. FIG: 1. ABCD ma się zamienić na inny BFEG, któryby miał tēż samę z pierwszym rozciągłość, a wysokość BF większą za wysokość BC. W tym razie miałoby się to naypierwiey uważać, że ponieważ rozciągłość żadanego rektangułu BFEG będzie produktem z iego wysokości i bazy, trzeba będzie w to potrafić, aby iako wysokość BF ma być większa niżeli BC, tak przeciwnie, baza iego BG była mnieysza a niżeli AB, to iest: że ieśliby wysokość BF była naprzykład we dwoie większa aniżeli BC, trzeba aby baza BG była półową tylko bazy AB.

Gdyby wysokość BF była wetroie większa niż BC, baza BG musiałaby być trzecią częścią bazy AB.

Także gdyby wysokość BF, zamiała tego, coby miała dwa, trzy, lub kilka zupełne razy zawierać w sobie wysokość BC, zawierała onę kilka razy z iakim fraktem, naprzykład dwa razy



razy zupełne, i nad to jedną trzecią część: rektangul BFEG niemógłby się zrównać z rektangulem ABCD, aźby się baza jego BG tymże sposobem zawierała w bazie AB, to jest, aźby BG dwa razy wzięta i trzecia oney część w jedną sumnę zebrane, zrównały się całej bazie AB. Ogulnie mówiąc, żeby dwa rektanguly ABCD, BFEG, były sobie równe, trzeba żeby jednego baza BG, tak się miała do bazy drugiego AB, iak wysokość BC do wysokości BF.

Na tym tedy rzecz się cała skończy, że dla znalezienia linii BG, która żadanemu Tryangulowi ma służyć za bazę, linia AB musi być rozdzielona na punkcie G tym sposobem, żeby tak się miała wysokość BF do wysokości BC, iako baza AB do bazy BG. A to się wykona przez Artykuł XLI Części I, gdy się poprowadzi linia AF, a z danego punktu C parallela do niej CG.

## VI.

## VI.

Do tey zamiany rektangulu AB-<sup>Drugi sposób</sup> CD na inny BFEG, któryby miał wy-<sup>zamienie-  
nia iedne-  
go Rektan-  
gulu na dru-  
gi, któryby  
miał wyso-  
kość daną.</sup> sokość daną BF, można użyć innego sposobu nie tak wprawdzie naturalnego iak jest pierwszy, barziefy jednak wygodnego.

Podłużywfszy linią AD, aźby się na TAB: VII.  
punkcie I, spotkała z linią FEI paral-<sup>Fig: 2.</sup> lełą do AB przez punkt F prowadzoną, napisać diagonalną BI, a przez punkt O, na którym taż diagonalna spotka się z bokiem DC, poprowadzić GOE parallelę do FB. Tym sposobem uformowany rektangul BFEG będzie równy rektangulowi ABCD.

Có żeby się dowiodło, dosyć będzie pokazać, iż gdy się od rektangulów ABCD, BFEG odeymie część onym spólna OCBG, zostaną dwa rektanguly OCFE, ADOG co do rozciągłości sobie równe. To zaś łącno demonstrować; z widomey bowiem równości dwu Tryangulów IBF, IBA wniesć należy, iż gdy się od tych Tryangulów  
L ode-



odetną części równe, te które się zostaną, równe też być muszą. Lecz tryanguly  $IDO$ ,  $IEO$ , także  $GBO$ ,  $OBC$  są równe; więc gdy  $IDO$ ,  $GBO$  od Tryangulu  $IAB$ , a zaś  $IEO$ ,  $OBC$ , od Tryangulu  $IBF$  odjęte będą, pozostałe ztąd reszty, to jest Rektanguly  $ADOG$ ,  $OCFE$  równe być muszą: a to jest co się miało demonstrować, i z kąd każdy wniesć już może, że gdy rzeczonym rektangulom  $ADOG$ ,  $OCFE$ , to jest każdemu z osobna przydany będzie ten sam Rektangul  $BCOG$ , summy to jest w rzeczy samey rektanguly  $ABCD$ ,  $BFEG$  będą równe.

## VII.

Ten drugi sposób zamieniania jednych Rektangulów na drugie, służy za fundament demonstracyi pierwszemu, o którym mogłoby się komu zdawać, że na samey tylko zasadza się indukcyi z przykładu dwu Rektangulów uformowaney. Co się bowiem wprzód z równości Rektangulów  $ABCD$ ,  $BFEG$  wniosło, że się tak mieć powinna

winna linia  $AB$  do linii  $BG$ , iako  $BF$  do  $BC$ , to dopiero z Artykułu przeszłego tak demonstrować można.

Ponieważ Tryanguly  $IAB$ , i  $OGB$  są widomie podobne sobie, baza  $AB$  wielkiego, tak będzie do bazy  $GB$  małego, iako wysokość  $IA$  do wysokości  $OG$ ; lecz wysokości  $IA$ , i  $OG$  równe są wysokościom  $BF$ , i  $BC$ ; więc będzie też  $AB$  do  $GB$ , iako  $BF$  do  $BC$ : wedle tego, czego też wyciąga Artykuł V.

## VIII.

Z tego cośmy dopiero mówili, wywodząc z równości dwu rektangulów  $ABCD$ ,  $BFEG$ , że tak się ma wysokość  $BF$  do wysokości  $BC$ , iako baza  $AB$  do bazy  $BG$ , możnaby także demonstrować, że gdy ze czterech linii  $BF$ ,  $BC$ ,  $AB$ ,  $BG$ , tak się ma pierwsza do drugiej, iako trzecia do czwartej: rektangul, któryby miał pierwszą za wysokość, a czwartą za bazę, zrównałby się rektangulowi, któryby miał wtórą za wysokość, a trzecią za bazę.

Dowód  
gruntowny  
tey propo-  
zycyi: We  
dnu rektan-  
gulach rów-  
nych baza  
pierwszego  
ma się do ba-  
zy wtórego,  
iako wyso-  
kość wtóre-  
go do wyso-  
kości pier-  
wszego.

Gdy ze czterech linii tak się ma pierwsza do drugiej, iako trzecia do czwartej: rektangul uformowany z pierwszej i czwartej równy będzie rektangulowi z wtórej i trzeciej.



## IX.

Liczyby lub wielkości takie, z których pierwsza tak się ma do wtórej, iako trzecia do czwartej, zowią się proporcjonalne, &c.

Co się zdarza w liniach, iakośmy dopiero widzieli, że tak się ma BF do BC, iako AB do BG, to się trafia też w innych iakichkolwiek wielkościach, to jest, że się tak ma pierwsza do wtórej, iako trzecia do czwartej; a w tym razie mówić się zwykło: że takie wielkości są w proporcyi, albo proporcjonalne, że formułą lub składają proporcya, że zachodzi między niemi proporcya, &c. Tak naprzykład 6, 9, 18, 27, są liczby proporcjonalne, ponieważ liczba 6, tyle razy zawiera się w liczbie 9, ile razy 18 we 27. Toż mówić o liczbach 15, 25, 75, 125.

## X.

Ze czterech terminów proporcji pierwszy i czwarty zowią się kraynemi lub końcowemi, wtóry i trzeci średniemi.

Pierwsza i czwarta ze czterech wielkości proporcjonalnych, nazywają się terminami kraynemi, czyli końcowemi: druga zaś i trzecia średniemi.

Wedle tych definicyi, propozycye w Artyk: VII, i VIII zawarte, mają się tak wyrażać:

## XI.

## XI.

Gdy cztery wielkości są proporcjonalne, produkt z terminów kraynych, jest równy produktowi z terminów średnich.

W proporcji produkt z terminów kraynych równy jest produktowi z terminów średnich.

## XII.

Jeśli cztery wielkości są takie, że produkt z terminów kraynych, jest równy produktowi ze średnich, te cztery wielkości są proporcjonalne.

Jeśli produkt z terminów kraynych jest równy produktowi z terminów średnich, cztery terminy są proporcjonalne.

## XIII.

Wiele na tym zależy, żeby dwa przeszłe Artykuły dobrze zrozumiane, i w pamięć wrazone były, iako wielce w Matematyce potrzebne. Z onych się bowiem wywodzą, prócz innych rzeczy, demonstracya owej Reguły, którą w Arytmetyce zowią Regułą trzech, albo złotą Regułą. Treść onej i istota najlepiej ukazać się może w przykładzie.

Zkąd się wywodzi reguła trzech albo reguła złota?

Day-



Daymy że do 30 łokci, sążni, albo prętów &c, roboty iakiey, która się mierzyć może łokciem, sążniem, prętem &c (iakie jest prowadzenie muru, kopanie stawów, oranie roli, &c) użyto przez czas pewny 24 ludzi: a chcianoby wiedzieć, wieleby się też zrobiło, gdyby przez tenże czas, użyto do tey samey roboty 64 ludzi.

Rzecz jest przez się iasna, iż solucya tey kwestyi, zawisła od znalezienia takiej liczby, któraby się tak miała do 64, iak się ma liczba 30, do liczby 24. Z tego zaś, co się wyżej mówiło, widomo jest, iż ta liczba powinna być taka, żeby produkt z oney i ze 24, był równy produktowi ze 30, i ze 64. Lecz produkt ze 30, i ze 64, czyni 1920. Więc liczba żądana będzie ta, która moltiplikowana przez 24 uczyni 1920. Gdy tedy wiadomy jest produkt, i jedna z tych liczb, z których moltiplicacyi ten się produkt rodzi, każdy mający iakąkolwiek pierwszych operacyi Aritmetycznych znajomość iacno postrzeże, że liczba żądana ma być kwotą wynikającą z di-

z diwizyi rzeczzonego produktu 1920, przez 24: a ta jest 80.

Ogólnie chcąc znaleźć czwarty termin iakieykolwiek proporcyi, <sup>Sposób</sup> <sup>znalezienia</sup> <sup>czwartego</sup> <sup>terminu</sup> <sup>proporcyi,</sup> <sup>które trzy</sup> <sup>pierwsze są</sup> <sup>wiadome.</sup> trzy pierwsze terminy są wiadome, trzeba wziąć produkt z wtórego i trzeciego, i diwidować go przez pierwszy.

## XIV.

Tak prosty i łatwy przykład, iaki jest ten, któryśmy umyślnie wybrali i dopiero przywiedli, dla ukazania w nim co to jest proporcya i owa złota reguła, podobno nie ukazuje dostatecznie, iak wielka jest potrzeba tych operacyi, których wyciąga sposób dopiero podany.

Zda się że sam rozum, bez nauki i podanych reguł, trafiłby znaleźć liczbę do szukania zadaną. Skoro bowiem jest widomo, że liczba 30 przewyższa liczbę 24 czwartą częścią, widomo też jest że liczba żądana ma przewyższać liczbę 64 czwartą częścią, a zatym czynić 80. Lecz nie zawsze taka bywa łatwość, iaka się w przywiedzionym zdarzyła przy-



przykładzie. W wielu innych przypadkach dłużejby się zabawić przyszło, nimby się znalazła relacya, która zachodzi między pierwszym i drugim terminem proporcyi.

Potrzeba jest, naprzykład, znaleźć czwarty termin proporcjonalny trzem liczbom następującym: 259, 407, 483. Szukając go sposobem Artykułu przeszłego, należy mnożyć 483 przez 407, a wynikiły z tego produkt 196581, przez 259 dziwować. Dziwizya da 759 za czwarty termin.

Szukać zaś inaczej tego terminu, byłoby to nieiako tentować szczęścia, i szukać go omackiem. Można by wprawdzie, acz nie tak łatwo jak pierwej, postrzedz naprzykład, że liczba 148, którą się różnią pierwsze dwa terminy 259, i 407, zawiera w sobie 4 siódmych części pierwszego terminu, albo liczby 259: a zatem iż trzebaby też przydać do trzeciego terminu, to jest do 483 liczbę 276, która zawiera w sobie 4 siódmych jego części. Lecz powyższchność i pewność sposobu w Arty-

kule

kule przeszłym danego, pozbawia nas tych wszystkich trudności, częstokroć nawet nieprzebytych, w którebyśmy za ślepym domysłu przewodnictwem wpaść mogli.

## X V.

Gdy kwadrat ma być przydany do kwadratu, tak z onemi postąpić należy iako z rektangulami, ponieważ kwadraty nie różnią się od rektangulów, ieno że mają wysokości równe bazom. Ieden tedy z kwadratów nie równych, naprzykład mniejszy, ma się zamienić na rektangul, którego by wysokość była równa bokowi kwadratu większego. Co gdy się stanie, a mniejszy będzie położony obok z większym, dwa kwadraty uczynią ieden rektangul. Można by też oba zmieścić w iednym rektangule, którego by wysokość była równa wysokości mniejszego kwadratu, albo iakieykolwiek inney wedle upodobania wziętey. Lecz, co każdemu wraz na myśl przyiść musiało, gdy o redukcyi dwu kwadratów do iedney

M      Fi-



Figury traktować zaczęto, jest to kwestya, o sposobie napisania kwadratu równego dwu innym: kwestya, którą łącno było solwować, iako się natychmiał pokaze.

## XVI.

TAB: VII.

FIG: 3.

Podwoić kwadrat, albo dwa kwadraty równe zmieścić w jednym.

Polóżmy naprzód, że dwa kwadraty ABCD, CBFE, któreby chciano zmieścić w jednym, są sobie równe; poprowadziwszy diagonalne AC, i CF, łącno się postrzeże, iż tryanguły ABC, i CBF pospołu wzięte, uczynią jeden kwadrat. Więc gdy drugie dwa, tryanguły, DCA, i CEF przeniesione pod linią AF złączą się z pierwszymi, uformuje się kwadrat ACFG, którego bok AC będzie diagonalną kwadratu ABCD, a rozciągłość równa rozciągłości dwu danych kwadratów: co tak jest iasno, że demonstracyi nie potrzebuie.

## XVII.

TAB: VII.

FIG: 4.

Daymy dopiero, że kto chce napisać kwadrat, równy summie dwu kwadratów

dratów nierównych ADCd, CFEf, albo co na toż samo wychodzi, zmieścić figurę ADFEfd na kwadrat. Zmieścić w jednym kwadracie dwa kwadraty nie równe.

Maiąc przed oczema sposób wyżej podany, uważać należy, ieśli na linii DF niemógłby się znaleźć iaki punkt H, maiący te kondycye:

1° Aby tryanguły ADH, EFH, za poprowadzeniem linii AH, i HE uformowane, a koło punktów A, i E póty obracane, ażby nabyły tey pozycyi, którą maią Adh, Efh, aby mówię, te dwa tryanguły złączyły się z sobą na punkcie h.

2° Aby cztery boki AH, HE, E $\hat{h}$ , hA były równe, i do siebie wzajem perpendykularne.

Ten zaś punkt H znaleziony będzie, gdy z boku DC odetnie się część DH równa bokowi CF, albo EF. Zrówności bowiem linii DH, i CF wynika naprzód, iż gdy tryanguł ADH póty obracany będzie koło punktu A, ażby wziął pozycyą tryangułu Adh, punkt H złączywszy się z punktem h, będzie miał odległość od punktu C równą przeciągowi DF.

M<sub>2</sub>

Z tey-



Z teyże równości linii DH, i CF wynika powtórę, że linia HF zrówna się linii DC, a tym samym, gdy tryangul EFH obracany będzie koło punktu E, ażby przyszedł do pozycyi tryangulu  $Efh$ , punkt H zeydzie się z punktem  $h$  mającym odległość od punktu C równą przeciągowi DF.

Zatym Figura  $ADFEfd$  zamieni się na Figurę cztero-ścienną  $AHEh$ . Więc nie zostanie iak obaczyć iuż tylko, ieśli wszystkie tey Figury boki są równe, i iedne do drugich wzajem perpendykularne.

Równość boków iest widoma, ponieważ  $Ah$ , i  $hE$  nie różnią się zgoła od AH, i HE; równość zaś tych dwu linii AH, i HE, ztąd się wywodzi, że ponieważ bok DH bokowi FE, oraz HF bokowi DC, a tym samym i bokowi AD są równe, dwa Tryanguły Rektanguły ADH, HFE, będą sobie zgoła równe.

Na resztę, że też same boki rzezoney Figury  $AHEh$ , iedne do drugich są wzajem perpendykularne, o tym wątpić nie będzie można, skoro da się widzieć, że Anguły od nich uformo-

wane

wane są proste. To się zaś łącno postrzeże, ieśli uważemy, że gdy Tryangul HAD będzie się obracał koło punktu A, dla wzięcia pozycyi  $hAd$ , bok AH tyle będzie musiał uczynić drogi, ile związany z nim bok AD. Lecz bok AD przeniosłszy się na  $Ad$ , formuie Angul prosty  $DAd$ . Więc i bok AH przeniesiony na  $Ah$  takż uformuie Angul prosty  $HAh$ .

Co się tycze innych Angulów H, E,  $h$ , te koniecznie muszą być proste. Rzecz iest bowiem niepodobna, aby w Figurze iakiey czwórma równemi ścianami zamkniętey, był ieden Angul prosty, a inne trzy nie były proste.

## XVIII.

Ieśli się uważy, że ze dwu kwadratów  $ADCd$ ,  $CFEf$ , ieden iest napisany linią AD, to iest, średnim bokiem Tryangulu ADH, drugi linią EF, albo naymnieyszym bokiem DH tegoż Tryangulu ADH; nad to że Kwadrat  $AHEh$ , dwu pierwszym równy, napisany iest naywiększym bokiem Tryangulu,

TAB. VII.  
Fig: 4.



Hipotenu- gułu, albo linią AH, która się pospoli-  
za jest to bok cie zowie Hipotenuzą Tryangułu Re-  
tryangułu; odkrycie się sławna owa Try-  
rektangułu. angułów Rektangułów własność: że

Kwadrat oney równy Kwadrat z Hipotenuzy, równy jest  
jest summie Kwadratów, summie Kwadratów ze dwu innych  
ze dwu in- boków.  
nych bo-  
ków.

## XIX.

TAB: VII. Więc ieśliby chciano ze dwu Kwa-  
Fig: 5, 16. dratów HDKL, ABCD uczynić ie-  
den, byłaby próżna robota, używać do  
Dwa iakie. tego konstrukcyi, w Artykule XVII opi-  
kolwiek. saney. Dosyć będzie, złączywszy onych  
Kwadraty. boki AD, DH tym sposobem, aby za-  
zmieścić w. wierały Anguł prosty, poprowadzić li-  
jednym. nią AH; ta bowiem będzie jednym z bo-  
Fig: 7. ków Kwadratu żadanego AHIE.

## XX.

TAB: VII. Także gdyby mając dwie Figury  
Fig: 8, 19. podobne DAFGM, DHPON, napi-  
sać chciano trzecią onym podobną, a  
co do rozciągłości summie onych rów-  
ną: byłoby dosyć, przeniosłszy Figurę

da-

danych bazy AD, HD na boki Angułu TAB: VII.  
prostego ADH, pociągnąć Hipotenuzę Fig: 10.  
AH, Tryangułu ADH; ta bowiem by-  
łaby Figury żadaney bazą. Ieśli trzy  
boki tryan-  
gułu rek-  
tangulu be-  
dą Bazami

Zebyśmy przyczynę tego widzieć trzech Figur  
mogli, stawmy sobie kwadraty ABCD, podobnych:  
DHKL, AHIE, napisane bazami trzech ta, którey  
Figur podobnych, Hipotenuza  
służyć bę-  
dzie za ba-  
zę, zrówna-  
się summie  
dwu innych  
Figur.  
kwadrat AHIE zrówna się summie dwu  
innych kwadratów ABCD, DHKL.  
Lecz Figury podobne są w proporcyi  
kwadratów napisanych bokami onych  
korrespondującemi; (I. części Artyk:  
XLVII.) Więc każdy ze trzech kwa-  
dratów ABCD, DHKL, AHIE,  
będzie się podobnie zawierał w swojej  
Figurze, którey bazą jest napisany, iak  
inne w swoich: albo, wszystkie trzy kwa-  
draty będą podobnemi swoich Figur  
częściami.

Zkąd łącno wniesć można, że Fi-  
gura AHQRS będzie równa dwu in-  
nym DAFGM, DHPON. Bo niech-  
by naprzykład każdy z kwadratów był  
półową Figury, w której jest zamknię-  
ty:



ty: niktby wątpić nie mógł, że Figura AHQRS jest równa dwu innym, ponieważ półowa iey równa jest półowom dwu Figur DHPON, DAFGM. Toż byłoby, gdyby kwadraty ABCD, DHKL, AHIE, były dwoma trzeciami, lub trzema czwartymi &c, częściami Figur DAFGM, DHPON, AHQRS.

## XXI.

Zmieścić  
wiele Figur  
podobnych  
w iedney  
onym podob-  
ney.

Do przydania też, lub zebrania w iedną sumnę trzech, czwórzech &c, Figur podobnych, albo co toż samo jest, trzech, czwórzech &c, kwadratów, ten sam sposób służyć ma. Tak naprzykład dla zawarcia trzech kwadratów w iednym, naprzód miałby się napisać kwadrat dwu danym równy; dopieroż do tego kwadratu nowego przydaćby się powinien trzeci, a ztądby wyniknął kwadrat trzem danym równy.

## XXII.

Ztąd idzie, iż gdyby miałby być napisany kwadrat, pięć, sześć, lub tyle razy

ży, ile się podoba, od kwadratu danego większy, byłoby dosyć użyć sposobu przeszłego: owszem gdyby przeciwnie znaleźć było potrzeba kwadrat, któryby nie czynił, iak piątą tylko, szóstą, lub taką, iaka się podoba, część kwadratu danego; coby iednak wyciągało, żebyśmy przypomnieli daną wyżey naukę, o znalezieniu czwartey linii trzem danym proporcjonalney. Wszakże w trzeciej części tego dzieła, poda się sposób prostszy, i wygodniejszy do solwowania podobnych kwestyi.

## XXIII.

Z Addicyi czyli zebrania Figur podobnych w iedną sumnę, to się iawnie pokazuje, że żadna Skala niema być tam używana, gdzie idzie o sposób czynienia z taką precyzją, która by się demonstrować mogła.

Daymy naprzykład, że ma być podwoiony kwadrat, albo co toż samo jest, że dwa równe kwadraty mają być zmieszczone w iednym. Ci, którzyby nie umieli sposobu w Artykule XVI

N

poda-



podanego, wedle wszelkiego podobieństwa takby sobie w tej mierze postąpili.

Naprzód rozdzieliliby jeden bok danego kwadratu na wielką liczbę, na przykład na 100 części; potym multiplikując 100 przez 100, znalazliby 10000 w produkcie, który byłby równy danemu kwadratowi; a to dałoby im 20000 części za walor kwadratu żadanego.

Wszakże mając walor, nie przeto mieliby sposób napisania kwadratu; do tego potrzebaby mieć jeden z boków wyrażony w takiej liczbie, któraby multiplikowana przez się samą, to jest, skwadowana, dała produkt 20000.

Lecz próżno byłoby szukać tej liczby na Skali, któraby przez swe podziały wyrażała w setnych częściach bok danego kwadratu; ponieważ liczba 141 przez się samą multiplikowana dałaby 19881, a zaś liczba 142 także skwadowana dałaby 20164; to jest, jedna mniej, druga więcej niż wyciąga bok żadanego kwadratu.

Mogłoby zatym przyścisnąć myśl, iż podzieliwszy na więcej niż na 100

czę-

części bok danego kwadratu, znalazliby liczbę wyrażającą zupełnie bok kwadratu we dwoie zaś większego; lecz po wszystkich swych usiłowaniach widzieliby na resztę, że próżna rzecz jest szukać dwu takich liczb, z którychby jedna wyrażała bok, albo, iak zwykli mówić Matematycy, liczbę lub wielkość radykalną iakiegokolwiek kwadratu, a druga wyrażała bok, albo wielkość radykalną drugiego kwadratu we dwoie za pierwszy większego.

Wielkość  
albo liczba  
Radykalna  
Kwadratu  
jest ta, która  
multiplikowa-  
na przez  
się samą da-  
je tenże  
kwadrat.

## XXIV.

Iakoż w rzeczy samej jest to demonstrowano w Arytmetyce, że jeśli jedna liczba nie jest doskonale wielokrotna względem drugiej, to jest jeśli większa z nich zawiera kilka nie zupełne razy mniejszą, kwadrat też większej nie będzie doskonale wielokrotnym względem kwadratu mniejszej. Tak ponieważ liczba 5, niemoże się doskonale diwidować przez 4, kwadrat onej 25 nie będzie się też mógł diwidować przez 16, to jest przez kwadrat ze 4.

Liczba  
jedna wie-  
lokrotna  
względem  
drugiej jest  
ta, która  
kilka razy  
zawiera dru-  
doskonale,  
to jest bez za-  
dnego fraktu

N 2

Więc



Więc gdy się kwadrują dwie liczby, z którychby jedna była większa niż druga, mniej jednak niż we dwoie, wyniknęłyby z tey operacyi dwie liczby, z którychby jedna była mnieysza, niż druga we czwornasob wzięta, od tey samey jednak więcej niż we dwoie lub we troie większa. Zatym gdyby też bok iakiego kwadratu był podzielony na tyle, ileby się podobało, części, bok kwadratu we dwoie zań większego, który, wedle tego co się w Artyk: XVI demonstrowało, będzie diagonalną kwadratu mnieyszego, nie składałby się z takiej liczby tychże części, któraby się mogła doskonale i zupełnie diwidować przez liczbę w boku mnieyszego kwadratu zawartą. Co Geometrowie tak zwykli wyrażać: bok, i diagonalna kwadratu nie mogą mieć wspólney sobie miary.

## XXV.

Inne linie, które wspólne sobie miarą nie mogą być mierzone.

To też ieszcze uważać można, iż wiele jest innych linii, które spólną sobie miarą nie mogą być mierzone. Napiszmy bowiem dwa liczb szeregi:

1,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c.  
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, &c.

Z którychby ieden, wyrażał liczby naturalnym porządkiem ułożone, drugi zaś onych kwadraty: postrzeżemy, iż iako te liczby, które w drugim szeregu między 1, i 4, między 4, i 9, między 16, i 25, &c są opuszczone, nie mają żadney korrespondującey sobie z liczb radikalnych w pierwszym szeregu wyrażonych, tak boki dwu kwadratów, z którychby ieden od drugiego we dwoie, we troie, w pięciore, w sześciore był większy, wspólney sobie miary mieć nie mogą.

## XXVI.

Lecz z tego, że wiele jest linii nie mających wspólney sobie miary, mogłaby się urodzić iaka wątpliwość o pewności tych propozycyi, które służyły nam za grunt i wywod proporcyi między Figurami podobnemi zachodzącey. Komparując bowiem te z sobą Figury (I Częci Artyk: XXXIV &c), polegałismy nieiako na tey suppozycyi, że  
ma-



maią one spólną sobie Skale, któraby wszystkim onych częściom za miarę służyć mogła. Wszakże z tego, cośmy dopiero mówili, pokazuje się, że suppozycja owa nie może być zbyt obszernie i powszechnie brana, ale w pewnych granicach powinna być zamknięta. Trzeba zatem żebyśmy się trochę cofnęli, a wróciwszy się do rzeczonych propozycji, żebyśmy weyrzeli, jeśli też one nie mają być określone.

## XXVII.

Weźmimy tedy na uwagę, co się w Artykule XXXIX. I. Części zawiera, a obaczmy jeśli to jest niezawodnie i

TAB: VII. ogólnie prawdą, że Tryąguły takie, FIG: II, II2, iakie są  $abc$ ,  $ABC$ , w których są też same Anguły, mają boki proporcjonalne. Daymy na przykład, że baza pierwszego jest  $ab$ , drugiego zaś baza  $AB$  równa się diagonalney kwadratu, którego boki jest  $ab$ . Założywszy tę suppozycyą, patrzmy jeśli relacya boku  $ac$  do  $AC$  będzie taż sama, która jest bazy  $AB$  do  $ab$ .

Cho-

Chociaż wedle tego, cośmy w przeszłych nie dawno Artykułach widzieli, przez żaden podział boku  $ab$  by też na naywiększą liczbę części, to się dokazać nie może, żeby liczba podobnych części zawartych w boku  $AB$ , była doskonale wielokrotna względem liczby zawartej w boku  $ab$ , to jest żeby się pierwsza mogła doskonale diwidować przez drugą: z tym wszystkim łącznie jest postrzedz, iż tym barziej bok  $AB$  zbliży się do miary spólney z bokiem  $ab$ , im na większą liczbę części bok  $ab$  będzie podzielony. Podzielmy na przykład  $ab$  na 100 części, liczba tychże setnych części bokowi  $AB$  służąca, znajdzie się między 141, i między 142, iak w Artykule XXII. Prześtańmy na 141, a reszty zaniedbaymy. Widomo jest (I. Części Artyk: XXXIX.) że  $AC$  zawierać także będzie 141 części boku  $ac$ .

Podzielmy iefzcze  $ab$  na 1000 części: Liczba tych tyśiącznych części składających bok  $AB$ , mnieysza będzie niż 1414, a większa niż 1415. Weźmimy 1414, a to, czego niedostaie, opuśćmy:



my: znajdziemy takóŜ, że  $AC$  zawierać będzie 1414 tysięcznych części boku  $ac$ : i na resztę ogólnie mówiąc, zawsze  $AC$  tyle części boku  $ac$  zawierać będzie, nawet z oŃatkiem w frakcie pozostałym, ile  $AB$  zawierać będzie części boku  $ab$  z oŃatkiem takŜe abo fraktem.

Nadto te oŃatki w fraktach pozostałe tym mniejsze będą, iakoŃmy iuŜ wyŜey namienili, im liczba części, na któresię bok  $ab$  dzieli, będzie wiéksza. Tym beŃpieczniej tedy moŜna tych oŃatków zaniedbać, im do wiékszey a wiékszey liczby podział boku  $ab$  pędzony będzie, tak dalece że gdyby ta liczba stać się mogła nieskończoną, oŃatki zgoła zniknąćby na resztę musiały. Zatem w ten czas mówićby się mogło: iż liczba części boku  $ac$ , któraby się zawierała w  $AC$ , równa jest liczbie części boku  $ab$  zawartych w  $AB$ , a tak było by  $AC$  do  $ac$ , iako  $AB$  do  $ab$ .

Demonstrowaliśmy tedy gruntownie, że we dwu Tryangulach mających teŜ same anguły, boki sã proporcjonalne, bądź

bądź mają spólną sobie miarę, bądź oney nie mają.

TymŜe sposobem mogłaby się wywieŃć propozycya (I. CzęŃci Artyk: XLV:) o proporcyy zachodzącey między liniami korrespondującemi w Figurach podobnych.

## XXVIII.

Przez podobne teŜ wywody ukazuje się widomie, że propozycye w Artykulach XLIV, i XLVII pierwszej CzęŃci wyłoŜone, gdzieŃmy dowiedli: że rozciągłoŃci Tryangulów i Figur podobnych zachowuią między sobã proporcyy kwadratów bokami onych korrespondującemi napisanych, że te, mówię, propozycye sã zawsze i ogólnie prawdziwe, w ten czas nawet, gdy boki tych Figur takie sã, że spólney sobie miary mieć nie mogã.

Weźmimy naprzykłał Tryanguły TAB: VII. podobne ABC,  $abc$ , a daymy że wyŃsokoŃci onych nie mają spólney miary z bazami; w tym razie Ńaden się nie znajdzie kwadrat byteŜ naymniejszy, O któ-

W tryangulach, i innych Figurach sobie podobnych, boki sã proporcjonalne w tym nawet razie, gdy re boki mierzone być nie mogą spólną sobie miarã.

Tryanguly, i Figury podobne sã zawsze w proporcyy kwadratów napisanych korrespondującemi o nych bokami.

Fig: II, 112.



któryby za miarę służyć mógł Tryangulom razem i Kwadratam Bazami onych napisanym; to jest rozciągłości  $abc$ ,  $abde$  równie nie będą mogły być mierzone spólną sobie miarą, iako i rozciągłości  $ABC$ ,  $ABDE$ ; z tym wszystkim to się niechybnie sprawdzić musi, że Tryangul  $ABC$  będzie do kwadratu  $ABDE$ , iako Tryangul  $abc$  do kwadratu  $abde$ .

W czym natychmiast upewnieni będziem, gdy ieno dobrze uważym, że im drobnieysze będą części Skali do mierzenia  $AB$ , i  $AC$ , służyć mającey, którey podział od suppozycyi naszej zawisł, tym bliższemi będziem znalezienia liczb owych, które prawdziwą relacyą Tryangulu  $ABC$  do Kwadratu  $ABDE$  wyrażać mają. Więc dzieląc Skalę Tryangulu  $abc$ : zawsze na tęż samę liczbę części, na którą Skala Tryangulu  $ABC$  jest podzielona, a ostatki lub frakty odrzucając, widzieć będziemy, że też same liczby równie wyrażać będą relacyą Tryangulu  $ABC$  do kwadratu  $ABDE$ , iako Tryangulu  $abc$  do kwadratu

dratu  $abde$ ; tak dalece że gdyby podział Skali, co się myślić a nie dokazać może, przyszedł na resztę do liczby niekończoney, ostatki lub frakty musiałyby zniknąć, a toby się mówić mogło: że liczby, któreby wyrażały relacyą Tryangulu  $abc$  do kwadratu  $abde$ , wyrażałyby też relacyą Tryangulu  $ABC$  do kwadratu  $ABDE$ , a tak Tryangul  $abc$  byłby do Tryangulu  $ABC$ , iako kwadrat  $abde$  do kwadratu  $ABDE$ . Toż by się prawdziło w innych też Figurach podobnych.







# POCZĄTKI GEOMETRYI.

## TRZECIA CZĘŚĆ.

### *O wymiarze i własnościach Figur Cyrkularnych.*



OD wymiaru Figur prosto-  
ściennych, gdy go dobrze  
już umiano, udać się bez  
wątpienia musiano do szu-  
kania sposobu, którymby się wymie-  
rzać też mogły Figury liniami krzywe-  
mi określone, albo iednym słowem  
krzywo-ścienne. Poła bowiem i wszyt-  
kie ogulnie place, które się do mierze-  
nia zdarzają, nie zawsze zawarte są w  
obre-



obrębie z linii prostych złożonym.

Częstokroć Figury krzywo-ściennne, także Figury mieszane, to jest po części prostemi, po części krzywemi liniami zamknięte, mogą być redukowane do Figur zgoła prosto-ściennnych, iako się już o tym wyżej namieniło.

TAB: VIII. Niech bowiem będzie Figura taka, iaka  
Fig: 1. jest ABCDEFG, do mierzenia dana: Wziąwszy bok krzywy AD za zbiór dwu, trzech, lub więcej linii prostych, a na mieysce linii krzywej FED położwszy prostą FD, będziemy mieli Figurę prosto-ścienną ABCDEFG, tak mało różniącą się od pierwszej, że iedna może być wzięta za drugą bez znaczney omyłki.

Możnaby więc mierzyć te Figury sposobami wyżej podanemi do wymiaru Figur prosto-ściennnych: lecz operacye takie nie zgodziłyby się z ową surowością Geometrom zwyczajną, która nic znieść nie może, coby zupełney precyzji i demonstracyi nie miało. Nad to są takie przypadki, w których dla redukcji czyli zamiany Figury krzywo-

wo-ścienney albo tez mieszaney na Figurę zgoła prosto-ścienną, trzebaby obręb oney dzielić na tak wielką liczbę części, że sposób ów zwyczajny, przez który dzieli się Figura na tryanguly, stałby się do wykonania niepodobnym.

Iakoż niewiem ktoby miał ochotę użyć tego sposobu, mając plac do mierzenia sobie dany taki naprzykład, iaki jest Z (Fig: 7.), albo też cały cyrkuł TAB: VIII. X (Fig: 8.). Inney bez wątpienia trzebaby szukać drogi, którąby przyiść można było do wymiaru Figur tym podobnych. My tu o tych tylko mówić będziemy, których obręby składają się z łęków Cyrkułu.

## I.

Niech będzie do mierzenia dana  
Fig: 3. area Cyrkułu X, czyli rozległość placu w obrębie cyrkułu zawarta. Naypierwiew uważać mamy, że Poligon, gdy w pisany jest w cyrkuł, im więcej ma boków, tym bliższy jest równości z cyrkułem.

Lecz



Lecz area lub rozciągłość Poligonu, (I. Części Artyk: XXII,) równa jest produktowi z boku BC, i półowy perpendykułu AH tyle razy wziętemu, ile Polygon ma boków; albo co na toż samo wychodzi, rozciągłość Polygonu ma za miarę produkt z obrębu całego BCDE &c, i półowy perpendykułu. Więc ponieważ za pomnożeniem boków do liczby nieskończenie wielkiej, rozciągłość, obręb, i perpendykuł Polygonu równałyby się rozciągłości, peryferyi, i promieniowi cyrkułu; Cyrkuł będzie miał za miarę produkt z peryferyi, i półowy promienia.

Miara cyrkułu jest produkt z peryferyi przez półowę promienia moltiplikowanej.

## II.

TAB: VIII. Z tąd idzie, że rozciągłość lub  
FIG: 4. area cyrkułu BCD równa jest rozciągłości tryangułu ABL, którego by wysokością był promień AB, a bazą linia prosta BL peryferyi równa.

Area cyrkułu jest równa Tryangułowi mającemu za wysokość promień, a za bazę linia prosta peryferyi równa.

## III.

Do mierzenia tedy Cyrkułu dość będzie

będzie mieć wielkość promienia i peryferyi. Względem promienia żadney niemasz trudności, ponieważ będąc linią prostą łatwo może być mierzony. Inna rzecz jest względem peryferyi; z tym wszystkim zmierzyć onę można niclę koło cyrkułu okręconą; co częstokroć w praktyce, gdzie nie o precyzją lecz o prętkość idzie, dobrze się nadarza.

Lecz zmierzyć Geometrycznie peryferyę cyrkułu, albo co toż samo jest, determinować prawdziwą oney relacyą do promienia lub diametru: to jest, czego przez tak wiele wieków szukano, a do tych czas ieszcze nie odkryto. Przywiedzionoć onę do tego, że już na stotysięczną, milionową, i taką na resztę, iakąby kto sobie założył, promienia cząstkę, prawdziwey chybić niemoże: żeby się iednak albo w liniach Geometrycznych ukazać, albo w liczbach skończonych zupełnie zamknąć i determinować mogła, tego mimo wielkich w tey mierze wynalazków, do tych czas ieszcze nie dokazano.



## IV.

Nie mamy więc jeszcze prawdziwej i zupełnej relacji, która zachodzi między peryferyą i promieniem lub diametrem cyrkulu: mamy jednak te, które są barzo bliskie prawdziwej, albo, iak mówią Matematycy, prawdziwej przez approxymacyą dochodzą. Z tych prawie najsławniejsza a oraz nayprostsza jest owa, którą wynalazł Archimedes.

Peryferya cyrkulu ma blisko 22 takich części, iakich siedm zawiera cały diame-  
tr.

Ten podzieliwszy diame-  
tr na 7 części, wyznaczył dla peryferyi tychże części mniej trochę niż 22, a więcej niż 21. Liczba tedy między temi dwoma średnia, pierwszej jednak niż drugiej bliższa, wyrażać będzie tę do 7 relacyą, którą ma peryferya do diame-  
tru.

## V.

To zaś przez się iawnie jest, iż gdyby wiadano prawdziwą relacyą, którą ma jedna tylko iakakolwiek peryferya do swego promienia, tym samym wiadzanoby relacyą, którą mają wszystkie inne peryferye do swych promieni;

po-

ponieważ relacya peryferyi do promienia we wszystkich zgoła cyrkulach taż sama być powinna. Co bez żadney demonstracyi iacno widzieć można, to tylko zważywszy: że iakiekolwiek operacye byłyby wprzód użyte do wymierzenia iedney peryferyi, to jest do determinowania wielkości oney w częściach promienia, tych samych potym użyćby trzeba było do wymierzenia kaźdey inney: więcby znaleźć musiano tak w iedney iako i w drugiej, i na resztę we wszystkich też samę liczbę części, z promienia kaźdey własnego, iako ze Skali innym podobney, wziętych.

Peryferya cyrkulów są w proporcji swych promieni.

## VI.

Widomo takż jest, że Cyrkuly mają ieszcze powszechną własność wszystkim podobnym Figurom służącą; a ta jest (I. Części Artyk: XLVII.) że płaszczyzny czyli rozciągłości są w proporcji kwadratów bokami onych korespondującemi napisanych. Lecż żeby się ta propozycya stosować mogła do cyrkulów, należy brać promienie

P2

za-



Plafczy- zamiast boków, a dopiero wnosić, że  
 zny cyrku- rozciągłości cyrkulów są proporcjo-  
 łów są pro- nalne kwadratowi promieniami onych  
 porcyonalne napisanym.  
 Kwadratowi  
 promienia-  
 mi onych  
 napisanym.

Ktoby nie widząc ściśłego związku  
 tej propozycji z Artykułem XLVII  
 Części I, chciał mieć oney szczególną  
 demonstracyą, ten miałby dobrze uwa-  
 żyć, że toż samo jest komparować dwa  
 z sobą cyrkule BCD, EFG, co i dwa  
 równe im tryangule ABL, AEM,  
 TAB: VIII. którymby peryferye BCD, i EFG  
 FIG: 4, 5. w dłuż rozciągnięte za bazy BL, i EM,  
 a promienie AB, i AE za wysokości słu-  
 żyły. Lecz przez Artykuł przeszły te  
 tryangule byłyby sobie podobne; więc  
 płafczyzny onych, a zatym i cyrkulów,  
 byłyby w proporcji kwadratów napi-  
 sanych korrespondującemi bokami AB,  
 AE, to jest promieniami Cyrkulów  
 BCD, EFG.

## V I I.

Cyrkule będąc zupełnie iedne dru-  
 gim podobne, tę ieszcze mają Figur po-  
 dobnych własność, iż gdy trzema boka-  
 mi

mi tryangułu rektangułu napisane będą Ze trzech  
 trzy różne cyrkule, ten, którego pro- Cyrkulów  
 mieniem będzie Hipotenuza, równa się napisanych  
 dwu innymi razem wziętym. trzema bo-  
 kami tryan-  
 gułu Rek-  
 tangulu ten,

Zawsze tedy można będzie napisać  
 cyrkul, któryby się równał summie  
 dwu innych, a to nawet żadnego z  
 nich niewymierzając. Tak gdyby, na-  
 przykład, trzeba było zrobić iakiekol-  
 wiek okrągłe naczynie, któreby miało  
 też samą wysokość, i tyleż wody za-  
 wierać mogło, ile dwa inne teyże Figu-  
 ry: albo gdyby do fontanny chciano dać  
 taką rurę, przez którąby tyle szło wo-  
 dy, ile przez dwie inne otworu danego;  
 wszystko by się to łatwo wykonało spo-  
 sobem dopiero ukazanym.

## V I I I.

Gdyby się zdarzyła do mierzenia TAB: VIII.  
 taka Figura, iaka jest V, którą Francu- FIG: 6.  
 zi nazywają koroną, a my nazwać mo- albo korona  
 żemy pierścieniem, to jest area zawar- jest to plac  
 ta między dwoma cyrkulami EFG, zawarty mię-  
 BCD toż samą centrum mającemi; co- dzy dwoma  
 by najpierwey w tym razie każdemu Cyrkulami  
 przyiść centrum ma-  
 iącemi.



przyiść na myśl mogło, byłoby to podobno: zmierzyć osobno rozciągłość dwu cyrkulów, a mnieyszą od większey odebrać. Wszakże łącno jest postrzedz, że toż samo Problema może się rozwiązać sposobem w praktyce wygodniejszy.

Stawmy sobie tryangul ABL, któremu by promień AB służył za wysokość, a linia prosta BL równa peryferii BCD za bazę. Gdy się poprowadzi przez punkt E linia prosta EM parallela do BL, uformują się dwa podobne tryanguly AEM, ABL, a zatym będzie AB do BL, iako AE do EM. Lecz przez założoną suppozycyą linia BL równa jest peryferii BCD mającej za promień linią AB. Więc linia też EM równa będzie peryferii mającej za promień linią AE, która jest częścią linii AB. Tożby się działo z iakąkolwiek inną linią KI parallełą do BL: byłaby ona zawsze równa peryferii napisanej promieniem AK.

Z wywiedzioney tak równości peryferii EFG, i linii prostej EM, wynika

nika to koniecznie, że tryangul AEM równy jest cyrkulowi EFG: a tym samym rozciągłość placu prostościenne-go EBLM równa się koronie czyli pierścieniowi V do mierzenia danemu. Lecz gdy się ML rozdzieli na dwie części równe MI, IL, a przez punkt I poprowadzi linia HIP perpendykularna do BL: przybędzie do Figury tryangul MHI równy tryangulowi odciętemu PLI. Zatym plac EBLM zamieni się na rektangul EBPH. Więc pierścień V będąc równy rozciągłości placu EBLM, zrówna się też z rektangulem EBPH, i będzie miał za miarę produkt z linii EB moltiplikowaney przez linią KI równą peryferii napisaney promieniem AK.

Dla wymierzenia tedy pierścienia V, trzeba moltiplikować onego szerokość EB przez peryferyą KOQ, która się zowie średnią między peryferiami BCD, i EFG. przeto że większa jest od peryferii EFG, albo linii EM, a mnieysza od peryferii BCD, albo linii BL, od obudwu zaś różni się tą samą wielkością MH, albo PL.

Dla wymiaru pierścienia, trzeba moltiplikować szerokość onego przez peryferyą średnią.



## IX.

TAB: VIII. Gdy się trafi do mierzenia Figura

Fig: 2. Y złożona z łęków cyrkulu, i linii pro-

Fig: 7. stych, albo Figura Z zawarta w obrębie z samych łęków cyrkularnych złożonym; cała trudność będzie na wymiarzeniu takich części cyrkulu, iaka jest

Fig: 8. ABCE, między łukiem ABC, i cięciwą AC zawarta, a segmentum albo uciniekiem cyrkulu jest zwana. Wszystkie bowiem Figury czy to z samych tylko łęków cyrkularnych, czy to z łęków razem i z linii prostych i cięciwą.

Wymiar figur cyrkularnych redukując do wymiaru segmentu. Wymiar figur prostokątne, powiększone lub zmniejszone przez przydanie lub ujęcie segmentów.

## X.

Mając cyrkul wymierzony, łatwo można mieć wymiar iakiegokolwiek segmentu ABCE. Gdy się bowiem poprowadzą linie AT, CT do punktu T, to jest do centrum łuku, uformuje się Figura ABCT sektorem zwana, której rozciągłość będzie do cyrkulu, iako

Fig: 8.

iako łuk ABC do całej peryferyi, za- tym będzie miała za miarę produkt z połowy promienia AT moltiplikowany przez łuk ABC. Gdy tedy od se- ktora tak determinowanego odetnie się tryangul ACT, zostanie segment ABCE.

Sektor jest to część cyrkulu między dwoma promieniami, i łukiem zawarta. Sektora i Segmentu miara.

## XI.

Pospolicie to się zdarza, że gdy mamy mierzyć Figurę taką, iaka jest Y, centrum łuku HIK nie mamy: bez czego iednak wymiar figury obeysć się nie może, ponieważ do sposobu w Artykule przeszłym danego wchodzi promień, a ten nie jest ieno linia prosta z centrum do łuku prowadzona. Trzeba tedy żebyśmy umieli znaleźć centrum, a zatym i promień każdego łuku cyrkularnego.

Niech będzie ABC \* łuk Figury do wymiaru daney: gdy z iakichkolwiek dwu punktów A, i B na nim wziętych iako z centrów, napiszemy cztery łuki *goi, foh; lph, mpn*, pierwsze dwa iakimkolwiek promieniem, a drugie dwa tym samym lub innym według upodobania

Znaleść centrum iakiegokolwiek łuku cyrkularnego. Fig: 9.

Q

bania wziętym; wiadomo będzie, że szukane centrum łuku ABC znajdować się musi na linii *op* przez punkt intersekcji prowadzonej.

Dopieroż obierzmy jeszcze na tymże łuku ABC trzeci punkt C, a gdy z niego oraz z B, tak iako pierwey z A, i B, napiszemy cztery łuki, będziemy mieli linią prostą *qr*, na której także znajdować się musi żądane centrum łuku ABC. Więc to centrum musi być punktem intersekcji T linii *op*, i *qr*.

## XII.

Trzy tedy punkta iakokolwiek położone, byleby nie leżały w linii prostej, zawsze mogą być związane przez iakokolwiek łuk cyrkul; albo co na toż samo wychodzi, iakokolwiek będzie porcja boków AC, i BC do bazy tryangułu ABC, zawsze tryanguł może być otoczony peryferyą cyrkul przez wierzchołki angulów prowadzoną.

TAB. VIII.

Fig. 10.

## XIII.

## XIII.

Gdy ten sposób otoczenia Tryangułu cyrkulem będzie stosowany do różnych tryangułów ACB, AEB, AGB &c, iedną spólną bazę AB, a różną wysokość mających: uważając wielkość angulów wierzchnych, C, E, G, &c, i pozycyą centrów względem bazy, iacno postrzeżemy, iż wedle tego, iako rzeczony anguly, poczynawszy od C, który ze wszystkich jest najmniejszy, tępieją coraz i stają się większemi: centra cyrkulów im własnych coraz barziej a barziej zbliżają się do spólney bazy AB; tak dalece, iż gdy angul G tryangułu AGB doszedł pewney wielkości, centrum cyrkul przeszło na drugą stronę rzeczoney bazy. Lecz widząc tę centrów odmianę, radzibyśmy też wiedzieli, iaki jest rodzaj tryangułu AFB w owym razie, gdy cyrkul koło niego napisany ma swoje centrum na samej bazie AB.

TAB. VIII.

Fig. 11.

Fig. 12.

Zebyśmy do tego przyszli, najpierwey uważać mamy, iż w tym razie część owa peryferyi, która przechodząc

Q2

przez



przez wierzchołki trzech angułów, obeymuie cały tryanguł, iest pół-cyrkułem, albo raczey z bazą AB zawiera półowę cyrkułu. Ponieważ bowiem centrum cyrkułu wedle założoney suppozycyi ma się znaydować na bazie, a ta się z obu stron kończy u peryferyi; więc (I. Części Artyk: VI.) baza AB stanie się diametrem, na którego śródku centrum znaydować się musi.

Dwie linie proste z jakiegokolwiek punktu peryferyi prowadzone do końców diametru, zawierają anguły proste.

Dopieroż widzieć można, iż z jakiegokolwiek peryferyi punktu F prowadzone będą linie FA, FB, anguły AFB zawsze będzie prosty. Gdy się bowiem F zwiąże z centrum M przez linią FM, uformują się dwa tryanguły AFM, MFB, z których każdy będzie izoscel; więc anguły AFM, MFB będą z osobna równe angułom FAM, FBM, albo co na toż samo wychodzi, anguły AFB złożony ze dwu AFM, MFB zrówna się summie dwu angułów FAM, FBM. Lecz AFB, FAM, FBM razem wzięte czynią 180 gradusów, albo dwa anguły proste; więc AFB czyni tego półowę, to iest ieden anguły prosty.

Każ-

Każdy tedy tryanguł rektangułu na bazie AB napisany, będzie miał tę własność, o której teraz była kwestya, to iest że będzie mógł być otoczony cyrkułem, którego centrum znaydować się będzie na bazie.

#### XIV.

Ta własność cyrkułu: że anguły w nim zawarty, który wierzchołkiem swym dosięga peryferyi, a boki ma osadzone na diametrze, zawsze iest prosty: daie pochop do uważenia, iestli inne też części cyrkułu nie mają podobney własności; naprzykład iestli anguły ACB, AEB, AFB zawarte w spólnym segmencie ACEFB nie będą sobie równe, tak iako te, które się zawierają w pół-cyrkule, są proste.

TAB: IX.  
Fig: 1.

Zebyśmy w tej mierze co pewnego mieli, poszukaymy wielkości iednego z tych angułów, a dopiero obaczym, iestli inne też samę mają wielkość. Weźmimy naprzykład anguły AEB, który TAB: IX.  
regu wierzchołek przypada na śródek łęku AEB. Ponieważ linia EDG przechodzi

Fig: 2.

chodząca przez centrum D rozcina ten  
angul na dwie części równe; dość nam  
będzie zmierzyć jego połowę, to jest  
Angul AED, albo, co na toż samo wy-  
chodzi, dość nam będzie wiedzieć, jaką  
jest częścią angul AEG iakiegokolwiek  
angulu mającego pewną miarę, iaki jest  
angul ADG, który ma za miarę łęk AG.

Jeśli się uważy, że tryangul AED  
jest Izoscel, łącno się postrzeże, że an-  
gul AEG jest połową angulu ADG.  
Tym samym bowiem że tryangul AED  
jest Izoscel, anguly jego AED, EAD  
(I. Części Artyk: XXXI) są równe.  
Lecz (I. Części Artyk: LXVIII) tym  
dwóm angulom razem wziętym równy  
jest angul zewnętrzny ADG. Więc ie-  
den z nich naprzykład AED albo AEG  
jest połową angulu ADG.

Dla teyże przyczyny angul DEB,  
albo GEB będzie połową angulu GDB.  
Więc summa angulów AEG, GEB  
to jest angul AEB będzie połową sum-  
my angulów ADG, GDB to jest an-  
gulu ADB. Aże temu służy za miarę  
łęk cały AGB, więc angulowi AEB  
słu.

służyć będzie łęk AG, to jest połowa  
łęku AGB.

## X V.

Znalazszy pewną miarę Angulu  
AEB, a chcąc wiedzieć jeśli jest on ró-  
wny innym, które w tymże segmencie  
na spólnym łęku ofadzone wierzchoł-  
kami dosięgają peryferyi: trzeba wéy-  
rzyć, jeśli którykolwiek z nich wedle  
upodobania obrany naprzykład AFB, TAB: IX.  
jest połową angulu ADB na tym sa- FIG: 3.  
mym łęku opartego, a wierzchołek w  
centrum mającego. W czym się na-  
tychmiał upewnim, gdy przez centrum  
D poprowadzim linią FDG. Na ów  
czas bowiem da się widzieć, że angul  
AFB składa się ze dwu innych AFD,  
DFB, które podług Artykułu przeszle-  
go są połowami angulów ADG, GDB;  
a ztąd się wniesie, że angul AFB jest  
połową angulu ADB, zatym równy  
angulowi AEB. Tymże sposobem wy-  
wieść można, że też angul ACB i ia-  
kiekolwiek inne któreby się w spólnym  
segmencie podobnie zawierały, są  
sobie równe. I to jest, czegośmy się  
wprzód dorozumiewali. XVI.

Wszystkie  
anguly ma-  
jące wierz-  
chołki u pe-  
ryferyi a bo-  
ki oparte na  
jednym spól-  
nym łęku, są  
równe, i ma-  
ją za spólną  
miarę, tegoż  
samego łę-  
ku, na któ-  
rym oparte  
są, połowę.

TAB: IX.

FIG: 1.



## XVI.

TAB: IX. Między różnemi angułami mające-  
 FIG: 1. mi wierzchołki u łęku ACEFG czę-  
 stokroć znajduią się takie, że przeszła  
 demonstracya zda się do nich nieścią-  
 FIG: 4. gać. Z tych jest anguł AFB, od dwu  
 cięciw AF, FB tak uformowany, że  
 linia od wierzchołka F przez centrum  
 D prowadzona, ani angułu AFB, ani  
 angułu ADB nie rozcina, i do środka  
 onych zgoła nie wchodzi. Lecz gdy się  
 postrzeże, że anguł DFA jest półową  
 angułu GDA, oraz anguł DFB póło-  
 wą angułu GDB; wiadomo będzie, że  
 po odcięciu angułu DFA od angułu  
 DFB, anguł zbywający AFB będzie  
 też półową angułu ADB schodzącego  
 z angułu GDB, za odcięciem angułu  
 GDA.

## XVII.

Uważanie Figur teraz od nas uży-  
 tych może też być powodem komu do  
 tego mniemania, że demonstracya prze-  
 szła nieściąga się, ieno do segmentów  
 od

od pół-cyrkułu większych. Wszakże  
 oświecić się w tym łącno można, uwa-  
 żając że każdy z takich nawet angułów,  
 jaki jest AFB, któryby miał wierzcho-  
 lek w segmencie od pół-cyrkułu mniey-  
 szym, byłby zawsze złożony ze dwu in-  
 nych DFB, DFA, które są półowami  
 angułów BDG, ADG, zatym miałby  
 za miarę półowę dwu łęków BG, AG,  
 to jest półowę łęku całego AGB.

## XVIII.

Upewniwszy się o równości angu-  
 łów AEB, AFB, AHB w tym sa-  
 mym segmencie zawartych, chcieliby-  
 śmy ieszcze wiedzieć, co się też stanie z  
 angułem AQB, gdy wierzchołek jego  
 zeydzie się z B, to jest ostatnim punktem  
 bazy AB. Ma-li onw tym razie zni-  
 szyć? wszakże do tego samego przyść-  
 by nie mógł, ieno przez niejakie sto-  
 pnie zmniejszania się: nie widać zaś  
 żeby to był za stopień albo punkt  
 zmniejszania się, do którego przyszedł-  
 szy miałby całe zniknąć, i niebyć wię-  
 cej angułem. Jeśli zaś i w tym razie

R

nie

nie przestaie być angulem; iakże docier  
iego miary? Jest to trudność, która  
rozwiązana być nie może bez pomocy  
Geometrii do wielkości nieskończenie  
małych stosowaney. Tey iakakolwiek  
znaiomość, nie większa nawet od owey,  
którą naturalnie wszyscy ludzie mają,  
posłużyć nam tu może, gdy trochę tyl-  
ko rozwiedziona, i objaśniona będzie.

Uważmy naypierwey, że gdy punkt  
E zbliżając się coraz do B, przebiega  
punkta F, H, Q &c, linia EB skraca się  
ustawicznie, albo raczey niemieszcząc  
się w obrębie cyrkulu, coraz się znacz-  
niey zań wymyka; przeciwnie zaś an-  
guł EBA między tąż linią EB, i drugą  
AB zawarty roście, i coraz się barzief  
á barzief rozwiera. Lecz chociażby  
linia EB przyszedłszy już do wielkości  
i pozycyi linii QB, naybarzief skróco-  
na była, przecież anguł AQB, nie prze-  
stanie być angulem: ponieważ bok ie-  
go QB, lubo po iedney stronie bazy AB  
dla małości swoiey nieznaczny i pra-  
wie już niewidzialny, na drugą iednak  
stronę, teyże bazy całą, niemal długość  
swo-

swoię ku R rozciągający, nie przestaie  
być do boku AQ skłoniony. A tak an-  
guł AQB ieśli nie dla samey linii QB,  
tedy dla kontynuacyi czyli podłużenia  
oney, musi być znaczny i widzialny.  
Cóż, będzieli taki na on czas, gdy linia  
QB skracaąc się iefzcze barzief, przyi-  
dzie na resztę do ostatniego punktu, i  
zniknie? co się stanie w ten czas z oney  
pozycyą, i podłużeniem?

Lecz z tego, co się namieniło o spo-  
sobie, którym się linia EB, albo QB  
skraca: to iest że skrócenie tey linii z  
iedney strony, iest podłużeniem oney  
na drugą stronę bazy AB, już widomo  
iest: że pozycya i podłużenie linii QB  
iest toż samo, co linia BS, która tak się  
dotyka cyrkulu na iednym tylko pun-  
kcie B, że go nigdzie więcej nie gaba,  
i przeto nazywa się *Tangens*.

*Tangens* iest  
to linia pro-  
sta dotyka-  
jąca cyrkulu  
na iednym  
tylko pun-  
kcie.

Rzecz tedy już przez się iasna iest,  
że za zniknieniem, czyli raczey prze-  
ściem linii EB na drugą stronę bazy  
AB, á złączeniem się z tąż samą bazą  
linii AE, po różnych swych skróceniach  
się i pozycyach na AF, AH, AQ &c:

Rz

An.



Anguś segmentu jest ten, który się między cięciwą i linią (Tangens) zawiera. Miara jego jest półowa łęku należącego do segmentu.

Anguś AEB będąc wprzód angulem AFB, AHB, AQB, staie się ostatecznie ABS między cięciwą AB, i linią (Tangens) BS zawartym; który angulem segmentu nazwany, tę własność zachować powinien, że ma mieć za miarę półowę łęku AGB.

Tę demonstracyą, acz dla swey abstrakcyi poczynaiącym nie łatwą, położyć tu sądziliśmy, przeto że może być barzo pożyteczna dla tych, którzyby nieprzeftaiąc na początkach Matematyki, mieli ochotę ćwiczyć się w Geometrii wyższey, albo do wielkości niekończenie małych stosowanej. Tym bowiem sposobem wczesnie przyzwyczaić się mogą do podobnych uwag, których rzeczona Geometria wyciąga.

Jeśliby iednak ta demonstracya nad pojęcie i siły poczynaiących była, łatwo pokazać im sposób znalezienia inney, wykladaiać naypierwszą własność linii *Tangentes* zwanych.

## XIX.

## XIX.

Ta własność zależy na tym, że linia tykaiąca się cyrkuln na iednym tyko punkcie B, powinna być perpendykularna do diametru IDB, który przez ten punkt przechodzi. Ponieważ bowiem krzywość cyrkulu tak iest iednostayna, że każdy diametr IDB dzieli go na dwie części IAB, IOB równe, i równie względem tegoż diametru położone: to też być musi, że dwie części linii BS, BH, z których się składa *Tangens* tym dwóm pół-cyrkulom spólna, są równie względem tegoż diametru położone. Toby zaś nie mogło być, gdyby diametr IDB niebył perpendykularny do linii HBS, która iest *Tangens*.

TAB: IX.

FIG: 7.

Linia *Tangens* iest perpendykularna do diametru przechodzącego przez punkt na którym *Tangens* dotyka się cyrkulu.

## XX.

Z tąd iuż łatwo widzieć, dla czego anguś segmentu ABS ma za miarę półowę łęku AGB.

TAB: IX.

FIG: 7.

Anguś bowiem ADB wzięty razem z dwóma angułami równemi DAB, DBA, czyni (I. Części Artyk: LXIV) dwa

dwa kąty proste. Więc połowa kąta  $ADB$  wzięta z jednym kątem  $DBA$  czyni jeden kąt prosty. Lecz kąt  $DBA$  z kątem  $ABS$  czyni też kąt prosty. Więc kąt  $ABS$  równa się połowie kąta  $ADB$ . Zatem jako kąta  $ADB$ , tak i kąta  $ABS$  będzie miarą połowy łuku  $AGB$ .

## XXI.

Dana dopiero demonstracya tej własności cyrkula; że kąt  $ABS$  ma za miarę połowę łuku  $AGB$ , podaje nam solucyą następującego Problema:

TAB: IX. Na linii  $AB$  napisać segment cyrkula, w którymby się zawrzeć mógł dany kąt  $L$ ; to jest napisać segment  $AFB$ , w którymby wszystkie kąty u peryferyi, takie na przykład, jaki jest  $AFB$ , równały się kątowi  $L$ .

Spółbnapisania segmentu, w którym ma się zawrzeć kąt dany. Dla solwowania tego Problema: z punktów  $A$ , i  $B$  trzeba napisać kąty  $BAS$ , i  $ABS$  z osobna równe kątowi  $L$ : dopieroż podnieść dwie linie  $AD$ , i  $DB$  perpendykularne do  $AS$ , i  $BS$ ; punkt spotkania się onych będzie centrum szukanego łuku  $AFB$ .

Linie bowiem  $BS$ ,  $AS$  przez Artykuł XIX będą *Tangentas* cyrkula, którego centrum będzie  $D$ , a promień  $AD$  albo  $BD$ , ponieważ  $AD$ , i  $BD$  są perpendykularne do  $BS$ , i  $AS$ . Nad to przez Artykuł przeszły kąt  $ABS$  ma za miarę połowę łuku  $AGB$ : lecz połowa łuku  $AGB$ , przez Artykuł XV, jest też miarą wszystkich kątów takich, jaki jest  $AFB$ . Więc te kąty  $AFB$  będą równe kątowi  $ABS$ , to jest kątowi  $L$ , tak jako Problema wyciąga.

## XXII.

Ze własności segmentów cyrkula, któreśmy dopiero wyłożyli, odkryte są i znaiome, wedle wszelkiego podobieństwa winniśmy to iedynie samey Geometrów ciekawości. Wszakże co się wielu innym wynalazkom zdarzyło, to się i temu trafić musiało; że co pierwey za rzecz ciekawą tylko a do niczego niezdatną miano, z tego potym wielkie pożytki odniesiono. Własności cyrkula, któreśmy tu demonstrowali,



li, iak szczęśliwie i pożytecznie w praktyce użyte były, wieleby dać można przykładów. My tu przywiedziemy jeden zawarty w następującym Problema, którego solucya częstokroć w Geografii bywa potrzebna.

TAB. IX. Niech będą trzy różne miejsca  
Fig. 10. A, B, C, których odległości wzajemne  
Znaleść odległość iak AB, BC, AC są wiadome: radzibyśmy  
kiego miejsca od trzech innych, które-  
ści od punktu D, z którego widzieć  
rych pozycy-  
cye są wiadome. Znaleźć można, lecz do żadnego przystąpić  
dome. nie można. Cóż w tym razie czynić?

TAB. IX. Naprzód położyć mamy na karcie  
Fig. 10, 11. trzy punkta  $a, b, c$ , któreby taką wzglę-  
dem siebie zachowały pozycyą, iaką  
mają trzy dane punkta A, B, C; albo  
mówiąc Geometrycznie, mamy napi-  
sać tryangul  $abc$  podobny tryangulo-  
wi ABC.

Dopieroż Grafometrem lub innym  
Goniometrykiem zmierzwszy wielko-  
ści angulów ADB, BDC: na bazie  
 $ab$  napiszemy segment  $bda$ , w którym-  
by się mógł zawierać angul ADB, a na  
bazie  $bc$  segment  $bdc$ , w którymby się  
mógł

mógł także mieścić angul BDC; co  
gdy wykonamy, spotkanie się tych dwu  
segmentów na punkcie  $d$ , wyznaczy  
nam na karcie pozycyą miejsca D,  
tym sposobem, że linie  $da, db, dc$ , tak  
będą względem linii  $ab, bc, ac$ , iako od-  
ległości żądane DA, DB, DC, wzglę-  
dem odległości danych AB, BC, AC;  
co niepotrzebuie demonstracyi, ponie-  
waż iawnie jest z tego, co się wyżej  
mówiło o Figurach podobnych.

## XXIII.

Opuściwszy wiele innych przykła-  
dów, przez któreby ukazać można by-  
ło, iak wiele korzystała praktyka z tych  
własności cyrkulu, któreśmy wyżej  
demonstrowali, pódźmy ieszcze do o-  
wych, które się wywodzą z pierwszych  
i niemniej iak pierwsze są pożyteczne.

W czym żebyśmy zachowali po-  
rządek, uważmy najpierwey, że z ró-  
wności dwu iakichkolwiek angulów  
EDC, EBC zawartych w cyrkule, a  
na tym samym łuku EC opartych, to  
się wniesć powinno: że tryanguly DAE,  
S BAC

TAB. X.  
Fig. 1.

BAC mają też same kąty, to jest (I Części Artyk: XXXIX,) że te trykątły są sobie podobne.

Dla której bowiem przyczyny kąt EDC jest równy kątowi EBC, dla tej samej kąt DEB będzie równy kątowi DCB; a co się tyczy kątów DAE, BAC, te wiadomo są równe: już to że się zawierają między temi samemi liniami po wzajemnej swej intersekcji podłużonemi, a zatym równie do siebie tak z jednej jak i z drugiej strony skłonionemi: już to że skoro dwa kąty jednego trykątu są równe dwóm kątóm drugiego, trzeci też musi być koniecznie równy trzeciemu. (I. Części Artyk: XXXVIII.)

Dopiero żebyśmy łącznie mogli rozemnić w trykątach ADE, ABC, powszechne własności trykątów podobnych, połączmy trykąt DAE, na TAB: X. trykącie BAC tym sposobem, żeby FIG: 1, 12. AD na AB, AE na AC, doskonale przypadły, a tym samym baza DE stała się równoległa do BC. To wykonawszy przypomnimy sobie:

1.° Ze

1.° Ze gdy dwa trykąty ADE, ABC są sobie podobne, cztery boki AC, AE, AB, AD są proporcjonalne; (I. Części Artyk: XXXIX.)

2.° Ze w każdej proporcji produkt z terminów kraynych jest równy produktowi z terminów średnich; (II. Części Artyk: VIII.) Żkąd już wniesiemy: że rektangul albo produkt z linii AC i AD jest równy rektangulowi z linii AE i AB. Co jest jedną z znanych własności cyrkułu, i co się inaczej tak może wyrazić: jeśli dwie linie proste tak są prowadzone w cyrkule, że jedna drugą przecina, produkt z dwu części jednej, równy jest produktowi z dwu części drugiej.

Gdy się dwie cięciwy przecina w cyrkule, rektangul części cięciwy jednej równy jest rektangulowi z części cięciwy drugiej.

#### XXIV.

Jeśli by dwie linie proste BE, DC przecinały się perpendykularnie w cyrkule, a jedna z nich na przykład DC była diametrem, wiadomo jest że druga byłaby rozcięta na dwie części równe AB, AE: których produkt ponieważ byłby kwadratem, własność cyrkułu w S2 prze-

TAB: X. FIG: 3.



Kwadrat z przeszłym Artykule wyłożona takby  
 iakieykol- się w tym razie wyrazić miała: ieśli w  
 wiek per- cyrkule z diametru DC podniesiona bę-  
 pendykular- dzie iakakolwiek perpendykularna AB,  
 ney podnie- kwadrat oney będzie równy rektangu-  
 sionej z dia- łowi z AD, i AC.  
 metru do pe-  
 ryferyi, iest  
 równy rek-  
 tangułowi ze  
 dwu części  
 na które się  
 dzieli dia-  
 metr.

## XXV.

Zdarza się częstokroć potrzeba za-  
 mienić mienienia rektangułu na kwadrat: co  
 Rektanguł na kwadrat. iak się ma wykonać, przeszły Artykuł  
 TAB: X. podaie nam łatwy sposób. Niech bę-  
 dzie ACFE rektanguł, który ma się  
 zamienić na kwadrat: podłużymy ieden z boków  
 Fig: 4. naprzykład większy AC ku D, tak żeby linia AD z równała się  
 mnieyszemu bokowi AE, należy napi-  
 sać diametrem DC półowę cyrkułu DBC: w którym gdy się bok EA  
 tak podłuży, ażby dosięgnął peryferyi na punkcie B, linia AB będzie bokiem  
 kwadratu szukanego, to iest równego  
 rektangułowi danemu ACFE.

## XXVI.

## XXVI.

Problema to zgoła nieróżni się od  
 owego, które tak wyrażone bywa: zna-  
 leść linią średnią proporcjonalną Co to iest li-  
 między dwoma liniami danemi. Przez nia średnia  
 średnią zaś proporcjonalną rozumie proporcyo-  
 się linia taka, która tak iest wielka czy- nalna mię-  
 li wielokrotna względem naymniey- dzy dwoma  
 TAB: X. fzezy, iak iest mała względem naywięk- liniami?  
 Fig: 4. fzezy; to iest, że ieśli naprzykład AB  
 iest średnia proporcjonalna między  
 AD i AC, tak się ma AD do AB, iako  
 AB do AC; a zatym ( II. Części Ar-  
 tyk: VIII ) produkt z AD, i AC, to iest  
 rektanguł z tych dwu linii będzie rów-  
 ny produktowi z linii AB multipliko-  
 waney przez AB, to iest kwadratowi  
 z AB. A to iest właśnie, iako każdy  
 widzieć może, czego wyciąga Proble-  
 ma Artykułu przeszłego.

Dla znalezienia tedy średniey Sposób na-  
 proporcjonalney między dwoma linia- lezenia li-  
 ni, trzeba zamienić rektanguł z tych nii średniey  
 dwu linii na kwadrat: tego bok będzie proporcyo-  
 linią żadaną. nialney mię-  
 dzy dwoma  
 liniami da-  
 nemi.

## XXVII.

## XXVII.

Inny spo-  
sób nalezie-  
nia linii śrze-  
dniej proporcyonal-  
ney.

Można też ieszcze znaleźć średnią proporcyonalną między dwoma liniami innym sposobem, który podaie nam własność cyrkułu w Artyk: XIII. wywiedziona. Daymy na przykład, że AC iest naywiększa zedwu linii danych, Fig. 5. a AD naymniejszy. Linią AC iako diametrem napisawszy półowę cyrkułu ABC przenieśmy na tenże diametr AC linią mnieyszą AD; dopieroż z punktu D podnieśmy perpendykularną DB. Ta spółkawczy się z peryferyą pół-cyrkułu, wyznaczy punkt B, który złączony z punktem A da nam linią AB średnią proporcyonalną między dwoma danemi AD, i AC. Poprowadziwszy bowiem linią BC, wiadomo iest, że tryangul ABC będzie u B rektangul: z tym (I. Części Artyk: XXXVIII,) tryangulowi ADB podobny: ponieważ dwa te tryanguly rektanguly mają jeden angul A spółny. Leez iesli tryanguly ABC, ADB są podobne, mają boki proporcyonalne. Więc będzie AD do

do AB, iako AB do AC; więc AB będzie średnią proporcyonalną między liniami danemi AD, i AC.

## XXVIII.

Gdyby chciano zamienić iakąkol-  
wiek prosto-ścienną Figurę na kwadrat,  
mogłoby się to wykonać przez Arty-  
kuł XXV, do którego żeby to Problema  
było redukowane, nie trzeba więcej  
iak tylko daną Figurę zamienić na re-  
ktangul. Co iest barzo łacno, ponieważ  
Figury prosto-ścienne nie są iak tylko  
zebraniem tryangulów, każdy zaś try-  
angul iest półową rektangulu mającego  
tęż samę bazę i wysokość, a na resztę  
wszystkie rektanguly złożone z tryan-  
gulów gdy do iedney wysokości redu-  
kowane będą, złożą ieden rektangul  
(II. Części Artyk: VI).

Zamienić  
figurę pro-  
sto-ścienną  
na kwadrat.

## XXIX.

FIGURY zamknięte w obrębie, do  
którego łęki cyrkularne wchodzą, mo-  
gą być także zamienione na kwadraty,  
gdy



gdy ieno długość łęków składających  
obręb wprzód wymierzona będzie. W  
ten czas bowiem mając to przed oczé-  
ma, co się mówiło w Artykułach IX, i  
X, o wymierze wszytkich Figur cyrku-  
larnych, można będzie te Figury, tak  
iako prosto-ścienne, zamieniać na rek-  
tanguly, rektanguly zaś na kwadraty.

## XXX.

Napisać  
kwadrat któ-  
ryby miał  
relacyą daną  
do kwadra-  
tu danego.

Własność cyrkulu w Artyk: XXIV,  
zawarta służy nam ieszcze do łączego  
napisania kwadratu, któryby miał re-  
lacyą daną do kwadratu danego. A to  
jest Problema, którego solucyą dać  
obiecaliśmy w Artykule XXII wtórey  
Części.

TAB: X.

Fig: 6.

Daymy naprzykład, że kwadrat,  
który napisać chcemy, ma być do kwa-  
dratu ABCD, iako linia M do linii N.  
Ten żebyśmy napisali, naprzód roz-  
dzielmy (I. Części Artyk: XLI,) dane-  
go kwadratu bok CB na punkcie E,  
tym sposobem, żeby linia CB tak się  
miała do BE, iako N do M; potym z  
punktu E poprowadźmy EF paralelę  
do

do AB. Rektangul ABEF, który ztąd  
wyniknie, będzie miał rozciągłość kwa-  
dratu żadanego. Niezostanie nam tedy,  
iako znaleziony rektangul zamienić na  
kwadrat.

## XXXI.

Chcąc napisać Poligon HIKLM, TAB: X.  
Fig: 7, 18. któryby miał też samę relacyą do poli-  
gonu ABCDE, którą ma linia X do Napisać po-  
ligon, któ-  
ryby do in-  
nego poligo-  
nu sobie  
podobnego  
miał relacyą  
daną. linii Y: trzeba naprzód bokiem AB po-  
ligonu danego napisać kwadrat ABGF,  
potym szukać innego kwadratu, któ-  
ryby tak był względem kwadratu  
ABGF, iako linia X względem linii Y;  
na resztę bokiem HI kwadratu znale-  
zionego napisać poligon HIKLM po-  
dobny danemu ABCDE. Nowy ten  
Poligon będzie Poligonem żadany.  
Przyczyna tego łączno się znaydzie, gdy  
się ieno przypomni, (I. Części Artyk:  
XLVIII.) że Figury podobne są pro-  
porcyonalne kwadratomi bokami onych  
korrespondującymi napisanym.

T XXXII.

## XXXII.

Napisac  
cyrkuł, któ-  
ryby do in-  
nego cyrku-  
łu danego  
miał relacyę  
daną.

Gdyby chciano napisać cyrkuł, któregooby rozciągłość tak była względem rozciągłości cyrkułu danego, iako X względem Y, trzebaby napisać kwadrat, któryby się tak miał do kwadratu napisanego promieniem cyrkułu danego, iako X do Y: a bok tego nowego kwadratu byłby promieniem cyrkułu żadanego.

## XXXIII.

Iest ięszcze iedna własność cyrkułu wynikająca z owey, która nam służyła do rozwiązania przeszłych Problematów.

TAB. X. Jeśli z punktu A wziętego za obrębem cyrkułu, będą poprowadzone według upodobania dwie linie proste ABC, ADE, z którychby tak iedna na dwu punktach B, i C, iako i druga na dwu także punktach D, i E, rozcięła peryferyę cyrkułu: tryanguły ACD, AEB, które się uformują za ukośnym rzeczonych punktów złączeniem przez linie CD, BE, będą sobie podobne: ponie-  
waż

Fig. 9.  
Jeśli z punktu wziętego za obrębem cyrkułu, będą poprowadzone dwie linie przezeń przechodzące, rektanguły z owych części

waż prócz angułu spólnego A, będą za cyrkułem miały anguły C, i E, wierzchołkami peryferyi tykające, bokami zaś na spólnym łęku oparte, a tym samym równe. Z podobieństwa zaś tryangułów CAD, EAB to się wnosić powinno, że cztery linie AB, AD, AE, AC będą proporcjonalne, a zatym rektanguł z kraynych AB, i AC, będzie równy rektangułowi ze śrzednich AD, i AE; co się tak wyrazić może: jeśli z iakiegokolwiek punktu A wziętego za obrębem cyrkułu będą prowadzone według upodobania linie proste AC, i AE, któreby rozcinały cyrkuł: rektanguł z całej AC, i z części za cyrkułem leżący AB, będzie równy rektangułowi z całej AE, i z części za cyrkułem także leżący AD.

## XXXIV.

Jeśli by linia prosta AF prowadzona z rzeczonego punktu A niewchodziła do środka cyrkułu, ale go tylko dotykała na iednym punkcie F: własność cyrkułu w przeszłym Artykule zawar-

T<sub>2</sub>

ta



Kwadrat ta na tęby się zamieniła: kwadrat linii z linii (*Tangens*) jest równy rektangulowi z całej linii AE rozcinającej cyrkuł, gułowi z linii (*Secans*) i przeto *Secans* nazwaney, oraz z części AD teyże linii za cyrkuł wychodzącej. Co się bardzo łatwo demonstrować może. Gdy bowiem *Tangens* AF tak będzie uważana iakby była *Secans*, to jest iakby na dwu punktach nieskończenie siebie bliskich rozcinała cyrkuł, w tym razie zamiast dwu owych AB, i AC, z którychby się tak, iako w cyrkułe przeszłym rektangul miał uformować, iedna tylko i taż sama będzie linia AF, a tak zamiast produktu albo rektangulu z linii AB, i AC, będzie kwadrat z linii AF.

## XXXV.

Propozycja w przeszłym Artyku-  
le demonstrowana pokazuje nam walor  
TAB: X. kwadratu linii (*Tangens*) AF, lecz nie  
FIG: 10. podaie sposobu, którym taż sama *Tan-*  
*gens* ma być prowadzona z danego punktu A za obrębem cyrkułu. Wszakże  
gdy sobie przypomnim (Artyk: XIX.)  
że

że *Tangens* FA ma być perpendykularna do promienia FG: natychmiast postrzeżemy, że prowadzenie tey linii za-  
wiſło od determinowania na peryferyi punktu F, na którymby anguł AFG, który ma *Tangens* zawierać z promieniem, był prosty. Gdy tedy na linii AG z danego punktu A do centrum G prowadzoney napiszemy półowę cyrkułu: Intersekcya wzajemna pół-cyrkułu z danym cyrkułem FKO (Artyk: XIII) wyznaczy nam punkt żądany F.





# POCZĄTKI GEOMETRYI.

## CZWARTA CZĘŚC.

*O sposobie mierzenia Figur pełnych, albo tych wielkości, które się zowią Solida: także o wymiarze zwierzchnych rozciągłości, które Solida zewsząd określone są.*



UBO te nauki, któreśmy we trzech pierwszych częściach ugruntowali, mogłyby nam zupełnie służyć do rozwiązania innych też Problematów nie równie trudniejszych za te, które dopiero mamy przełożyć; więcęcy iednak zależy na tym, abyśmy



śmy trzymając się porządku, któryśmy wprzód zachowali, udali się do wymiaru Figur pełnych, to jest wielkości mających długość, szerokość, i głębokość czyli wysokość.

Ten wymiar bez wątpienia był iednym z onych obiektów, które naypierwiej obróciły na się uwagę Geometrów. Do czego różne mogły być powody. Chciano wiedzieć naprzykład, wieleby się znaydowało cegieł albo ciosanych kamieni równey wielkości w jakim murze, którego wysokość AD, długość AB, szerokość BG były wiadome. Trzeba było determinować, wiele zawiera się wody w iakiey fossie, studni, albo sadzawce ABCD; iaka też jest ogromność wieży, Obeliszka, pałacu lub innego gmachu &c.

Zebyśmy postąpili z Figurami mającemi trzy rzeczony dymensye tym samym sposobem, któregośmy się trzymali w Figurach płaskich, albo dwie tylko dymensye mających, uważmy naypierwiej te solida, które płaskimi ścianami są określone.

Nie

Nie trzeba już nam będzie mówić o sposobie mierzenia zwierzchnych rozciągłości, które tym Solidom służą za śelany: one bowiem, ponieważ składają się miazą z figur prosto-ściennych, mierzone być mogą sposobem w pierwszey części opisanym.

# I.

Zebyśmy do wymiaru pełności Solidów przyść mogli, zda się być naylancniejszy i naykrótsza droga, komparować one z nayprostsza i nayregularniejszy bryłą ze wszystkich Solidów, tak iako figury płaskie, gdy szło o wymiar onych, komparowane były z kwadratem. Ta zaś bryła ze wszystkich Solidów nayprostsza i nayregularniejsza jest Kubus, który w rzeczy samey tóż samo jest względem figur pełnych, co kwadrat względem figur płaskich. Jest to bowiem wielkość taka, iaka na przykład daie się widzieć w Figurze *abcdefgh*, którey długość, szerokość, i wysokość są równe, albo, co na toż samo wychodzi, jest to figura sześcią równemi kwadratami zamknięta.

Kubus jest to bryła sześcią równemi kwadratami ześlona: a wszystkim Solidom za spólną miarę służąca.

TAB: XI.  
Fig: 3.

U

Bo-

Bokiem Kubusa zowie się bok owych kwadratów, które służą mu za ściany.

Przez stopę kubiczną rozumie się Kubus, którego bok ma stopę iedną długości. Toż mówić o sążniu, łokciu, calu &c kubicznym: są to bryły kubiczne, których boki mają sążeń, łokieć, cal &c długości.

## II.

Solida, których wymiar zdarza się najczęściey, są bryły podobne Figurze

TAB: XI. *Fig: 1.* ABCDEFGH, to jest zamknięte sześcią prostokątami ABCD, CBGF, CFED, DEHA, GFEH, ABGH. Zowiemy je Parallelopipeda, przeto, że ściany onych na przeciw siebie leżące

będąc w całym swym rozciągu równie iedne od drugich odległe, nazwane są *Parallele*, na wzór owych linii, które też samę wszędy zachowują od siebie odległość.

## III.

Mierzyć zaś takowe solida, jest to Problema podobne owemu, które się ściąga

ściąga do mierzenia rektangulów, a za tym podobnym też sposobem rozwiązane być powinny. Trzeba więc iakąkolwiek miarą na sążnie, łokcie, stopy, lub cale &c podzieloną, wymierzyć wszystkie trzy dymensye figury daney, to jest: długość AB, szerokość BG, wyfokość albo głębokość AD: dopieroż ze trzech liczb trzy rzeczony wymiary zawierających uczynić produkt; ten wyrażać będzie zawartą w parallelopipedzie liczbę sążni, łokci, stop, calów &c kubicznych, wedle tego, iako rzeczony dymensye w sążniach, łokciach, stopach, calach &c wzięte były. Treść i porządek tey operacyi w przykładzie lepiéy się pokaże.

Daymy że wysokość AD ma 6 łokci, długość AB 5, a szerokość BG 4; więc rektangul ABCD, to jest (I. Części Artyk: XII.) produkt z AD, i z AB zawierać będzie 6 razy 5, albo 30 łokci kwadratowych. Dopieroż jeśli linie BG, CF, DE, AH, z których każda nien niey iako BG, mierzy szerokość figury, podzielone będą na cztery części równe, to jest na łokcie, a przez

U 2

pun-

Wymiar parallelopipedu.



punkta korrespondujące podziałów przeprowadzają się płaszczyzny, iedne do drugich paralele: dany do wymiaru paralleliped, rozdzielony będzie na cztery inne mające wysokość i długość spólną z całym, a szerokość na łokieć ieden, wszystkie zaś podobne sobie i równe. Aże pierwszy z tych czterech parallelipedów, iako w samej figurze łatwo widzieć, zawiera 30 łokci kubicznych, ponieważ zewnętrzna jego ściana ABCD składa się ze 30 łokci kwadratowych; więc cały paralleliped ABCDEFGH, zawierać będzie 4 razy 30, to jest 120 łokci kubicznych.

## IV.

Opuściwszy rozmaite sposoby do konstrukcyi parallelipedów służące, a po większej części tak łatwe, że same przez się każdemu przyiść na myśl mogą, przestańmy na tym, który pożyteczniej nad inne uważany być może, chociaż się do imaginacyi tylko, a nie do praktyki ściąga. A ten jest: imaginować

wać sobie, że iakikolwiek kwadrat albo rektangul ABGH tak się pomyka w górę, iż nowe onego pozycye, których nabywa, są zawsze paralele do pierwszej, a każdy ze czterech angulów A, B, G, H, przebiega iedne ze czterech linii AD, BC, GF, HE perpendykularnych do płaszczyzny rektangulu ABGH.

Paralleliped formu-  
ie się przez  
kwadrat lub  
Rektangul  
tak pomy-  
kany, że  
nowe one-  
go pozycye  
są zawsze  
względem  
pierwszej  
paralele.

## V.

Prawie niepotrzebna zda się być przestroga, że przez linią do płaszczyzny perpendykularną, rozumiemy taką linią, która się w żadną stronę ku tej płaszczyźnie nieklania. Tóż mówić o płaszczyznach, z których, gdy iedna tak stoi prosto na drugiej, że się na żadną stronę nieklania, jest do niej perpendykularna.

Linia per-  
pendykular-  
na do płasz-  
czyzny jest  
ta, która się  
w żadną stro-  
nę ku niej  
nie klania.  
Też mówić  
o płaszczy-  
znach wz-  
ajem do siebie  
perpendy-  
kularnych.

Te dwie definicje są podobne owej, która służy linii perpendykularnej względem innej linii, w pierwszej części dana.

## VI

## VI.

TAB: XI.

Fig: 4.

Linia per-  
pendykular-  
na do płasz-  
czyzny, jest  
perpendy-  
kularną do  
wszystkich  
linii tejże  
płaszczyzny  
prowadzo-  
nych z pun-  
ktu, na któ-  
rym ona  
stoi.

Ztąd zaś idzie, iż linia AB, tym samym że jest perpendykularną do płaszczyzny X, powinna też być perpendykularną do wszystkich linii AC, AD, AE, &c prowadzonych z punktu A, na którym ona stoi, a leżących na rzeczoney płaszczyźnie. Jest bowiem rzecz widoma, iż gdyby ta perpendykularna skłaniała się ku któreykolwiek z tych linii, byłaby tym samym skłonięta ku ledney stronie płaszczyzny, więc nie byłaby do niej perpendykularna.

## VII.

Chcąc mieć dowód oczewisty, iż linia AB może być perpendykularną do wszystkich linii z ostatniego oney punktu na płaszczyźnie prowadzonych, trzebaby mieć figurę nie ryfowaną, ale na wierzch wyrabianą, którą tym sposobem wykonać można. Naprzód z iakieykolwiek materyi gładkiej i giętkiej, naprzykład z kartonu zrobić rektangul FGDE, i rozdzielić go na dwie części równe przez linią AB, perpendy-

Fig: 5.

pendykularną do boków ED, FG; po tym złamawszy ten rektangul wzdłuż linii AB, tak żeby ta linia przypadła na samo złamanie, postawić go na płaszczyźnie X, bokiem ED na dwie części AE, AD, złamanym. To gdy się stanie, widzieć będzie można, iż pod iakimkolwiek kątem rozwierane będą dwie części FBAE, GBAD złamanego rektangułu EADGBF, zawsze do płaszczyzny przylegać i po niej ślizgać się muszą, a linia AB też samą pozycyą względem rzeczoney płaszczyzny nieodmiennie zachowa. Więc linia AB będąc perpendykularną do boków AE, AD przez konstrukcyą, będzie też perpendykularną do wszystkich linii z ostatniego oney punktu A na płaszczyźnie X prowadzonych, ile że boki AE, AD przez różne rozwarcia koło linii AB obracane, z onemi się schodzą i spadać będą musiały.

## VIII.

Z konstrukcyi teraz opisaney wynika bardzo łatwy i wygodny w praktyce sposób, którym linia perpendykularna



larna z danego na płaszczyźnie punktu podniesiona, albo też do płaszczyzny z punktu od niey odległego spuszczone być może. Niech bowiem dany będzie czy to na płaszczyźnie punkt A, czyli też nad płaszczyzną punkt H: zawsze można będzie tak posuwać złamany rektangul EFBGDA na płaszczyźnie X, aż linia AB, to jest linia spółney intersekcji dwu części złamanego rektangulu wpadnie na punkt dany. Co gdy się trafi, będzie AB w obu-razach żadaną perpendykularną.

## I X.

Linia bę- Z tąż też idzie, iż linia AB zawsze będzie perpendykularną do płaszczyzny X, skoro będzie perpendykularną do dwu linii AE, AD na téy płaszczyźnie leżących. W tym bowiem razie linia AB może tak być uważana, iako by była linią spółney intersekcji dwu części złamanego rektangulu, z których by jedna na AE, druga na AD postawiona była. Ta zaś linia spółney intersekcji nie może nie być perpendykularną do płaszczyzny X.

## X.

## X.

Cheąc na linii KL osadzić iaką płaszczyznę perpendykularnie do płaszczyzny X, na której owa linia jest położona, można do tego użyć jeszcze rektangulu GBFEAD. Gdy się bowiem na linii KL iedną z części ADGB owego rektangulu postawi bokiem AD, płaszczyzna tey części będzie do płaszczyzny X perpendykularną.

## X I.

Toteż da się widzieć, iż trzecia płaszczyzna Y, gdy się położy na dwu bokach FB, BG, tegoż rektangulu GBFEAD stojącego na płaszczyźnie X, będzie perpendykularna do linii AB, a tym samym parallela do płaszczyzny X.

Więc jeśli ze trzech punktów leżących nie w prostej linii na płaszczyźnie X, podniesione będą perpendykularnie trzy równe linie EF, AB, DG: płaszczyzna Y przez trzy wierzchołki punkta F, B, G, prowadzona, będzie parallela do płaszczyzny X.

## W

## XII.

## XII.

Gdy dwie płaszczyzny nie są do siebie paralele, łącno będzie za pomocą także złamanego rektangułu determinować anguł między niemi zawarty.

TAB: XI. Co iak się ma wykonać, obaczmy. Na-

Fig: 9. przód widomo iest, iż gdy iednę ze dwu części ABGD rzeczónego rektangułu położemy całą swą płaszczyzną na płaszczyźnie X: anguł EAD, albo temu równy FBG będzie miarą skłónienia się płaszczyzny EABF do płaszczyzny ABGD, a zatym i do płaszczyzny X. Dopieróż gdy sobie przypomnim i uważym, iż AB iest linia spólney sekcyi tych to płaszczyzn do siebie skłóionych, a zaś AE i AD są perpendykularne do AB, łącno ztąd wniesiemy następującą regułę, która tak się wyraża:

Chcąc zmierzyć anguł zawarty między dwóma danemi płaszczyznami, które nie są paralele, naypierwiefy znaleźć potrzeba linią prostą, która iest onych spólną sekcyą; potym z iakiegokolwiek punktu tey linii poprowadzić dwie linie: iedną na iedney, drugą na drugiey.

Zmierzyć anguł, pod którym skłónione są do siebie dwie płaszczyzny.

drugiey płaszczyźnie, obie zaś do spólney sekcyi perpendykularne; na resztę zmierzyć anguł między temi dwóma perpendykularnemi zawarty: ten bowiem będzie miarą angułu między dwóma danemi płaszczyznami zawartego.

## XIII.

Ponieważ widomo iest, iż gdy się TAB: XI. płaszczyzna ABFE obraca koło linii Fig: 9. AB, linia AE pisząca swym końcem E, łęk cyrkułu ED, znayduie się zawsze na płaszczyźnie EAHD perpendykularney do płaszczyzny X; nad to, iż skłónienie się linii AE do teyże płaszczyzny X, nic innego nie iest ieno anguł EAD; więc łącno też iest widzieć, iż skłónienie się iakiegokolwiek linii EA do płaszczyzny X, równe iest angułowi EAH zawartemu między tą samą linią AE, i drugą AD przechodzącą przez A i H dwa punkta płaszczyzny X, z których ostatni to iest H tam się znayduie, gdzie pada perpendykuł EH, z iakiegokolwiek punktu E linii AE spuszczo-

Zmierzyć anguł, pod którym linia skłónia się do płaszczyzny.



## XIV.

TAB: XI. Samo przypatrzenie się Figurze, Fig: 9. które użyliśmy w przeszłym Artykule, podaie nam sposób nowy spuszczenia perpendykułu EH do płaszczyzny X z danego nad nią punktu E. Ten sposób tak się ma wykonać:

Drugi sposób spuszczenia linii perpendykularney do płaszczyzny, z danego nad nią punktu. Położywszy na płaszczyźnie X według upodobania linią prostą BAS, z danego punktu E poprowadzić do niej perpendykularną EA; potem z punktu A, z którym się ta perpendykularna spotyka, na płaszczyźnie X napisać perpendykularną AD do linii AB; nakoniec z danego punktu E spuścić do linii AD perpendykularną EH; ta będzie perpendykularną do płaszczyzny X.

## XV.

Drugi sposób podniesienia linii perpendykularney z danego punktu M na płaszczyźnie X. Gdy się bowiem z jakiegokolwiek punktu E nad płaszczyzną X obranego, spuści perpendykul EH do teyże płaszczyzny,

á zaś

á zaś z punktu danego M gdy się poprowadzi MN do HE parallela: ta będzie perpendykularną do płaszczyzny X.

## XVI.

Po parallelopipedzie następuje Pry-TAB: XI. zma proste, iako ze wszystkich Solidów Fig: 10. nayregularnieysze. Jest to Figura pełna ABCDEFGHIKLM, które dwie bazy parallele na przeciw siebie leżące, są dwa równe poligony tak osadzone, że boki jednego GF, FE, &c zachowują parallelizm względem boków drugiego BC, CD &c, ściany zaś są to rektanguly ABGH, BGFC, &c.

## XVII.

Wedle dowcipney suppozycyi Geometrów, te figury formują się tak iako parallelopipeda, przez pomykanie się bazy w górę tym sposobem, że wszystkie oney pozycye, których nabywa, są parallele do pierwszej, anguly zaś A, B, &c znajdują się zawsze na liniach do bazy perpendykularnych.

## XVIII.

## XVIII.

Ponieważ rozmaite są pryzmata proste, różność onych wyraża się przez nazwiska wzięte od różnych poligonów, które służą im za bazy. Tak na przykład pryzma mająca za bazę hexagon, zowie się hexagonalne-

## XIX.

Do znalezienia powszechnego sposobu, którymby wszelakie pryzmata proste mierzone być mogły, dobrze nam posłużą dwie następujące uwagi.

Pierwsza: iż ze dwu pryzmatów prostych równe bazy mających to, któreby miało wysokość większą, byłoby też większe co do pełności albo wielkości solidom własnej, wedle tej relacji, któraby zachodziła między większą a mniejszą wysokością.

Dwa pryzmata mające równą wysokość, a bazy nie równe, z którychby jedna

## XX.

Druga uwaga jest ta: iż dwa pryzmata proste mające też samą wysokość, a bazy nie równe, z którychby jedna

dna kilka razy zawierała drugą, byłyby swym bazom proporcjonalne, to jest, iedno byłoby tak większe względem drugiego, iako baza względem bazy. O prawdzie tej propozycji łatwo można się upewnić, wzięwszy na uwagę sposób, którym się pryzmata formują, w Artykule XVII opisany.

Niech będą dwa pryzmata  $abcde$  TAB: XII.  $fghiklm$ ,  $ABCDEFGHJKLM$  Fig: 10. i 11. mające równą wysokość, a bazy nie równe, z którychby mniejsza  $abcdlm$  była naprzykład czwartą częścią większej  $ABCDLM$ . Ponieważ te dwa pryzmata uformowały się przez swe bazy tak pomykane w górę, że wszystkie onych pozycye, których nabywały, były zawsze do pierwszej paralele; Więc każda płaszczyzna paralela do owej, na której dwie rzeczne bazy osadzone są, rozcinając dwa pryzmata, za każdą razą tak w iednym iako i w drugim wykroi dwa poligony, z których każdy będzie równy bazie tego pryzma, w którym jest wykrojony. To jest, sekcyja iakiegokolwiek pryzma zawsze będzie we czworo większa za sekcyją



cyą małego. Zatem wielkie pryzma  $ABCDEFGHJKLM$  może być tak uważane, iakby się składało z ciekich warst nakształt listków, we czworo większych za warsty małego pryzma  $abcdefghiklm$ , a tym samym pełność pierwszego pryzma będzie we czworo większa za pełność drugiego.

## XXI.

Z tych dwu uwag nie trudno będzie wniesć następującą regułę, która służyć ma do mierzenia wśzytkich pryzmatów prostych.

Pryzma proste ma za miarę produkt z bazy multiplikowanej przez wysokość. Naprzód trzeba znaleźć w sążniach, łokciach, i calach kwadratowych &c, wielkość bazy, którą ma pryzma do wymiaru dane: potym liczbę tychże sążni, łokci, i calów kwadratowych znalezionych w bazie multiplikować przez liczbę sążni, łokci, i calów &c zawartych w wysokości tegoż pryzma; produkt wyrazi liczbę sążni, łokci, i calów kubicznych, które się zawierają w całym pryzma, a zatem będzie jego miarą.

## XXII.

## XXII.

Przez pryzmata rozumieją się tak- Pryzmata ukośne tym się różnią od pryzmatów prostych, że tym służą za bazy rektangulów, owym parallelogrammy. że solida, którym za bazy, nie mniej iako pryzmatom teraz opisanym, służą poligony równe, za boki zaś mają rektangulów parallelogrammy. Te nowe pryzmata żeby się nazwiskiem różniły od owych, które zowiemy prostemi, nazwane są pryzmata ukośne.

## XXIII.

Sposób, którym się formułą pryzmata ukośne, wedle suppozycji Geometrów jest ten: baza  $abck$  tak się posuwa w górę, że każda z nowych onych pozycji jest parallela do pierwszej, angulę zaś pomykają się wedle linii  $ag$ ,  $bh$ ,  $cd$  &c, które będąc między sobą parallele, nie są do bazy perpendykularne. Sposób, którym się formułą pryzmata ukośne. TAB: XI. FIG: 13.

## XXIV.

Z podobieństwa sposobów w przeszłym, i XVII Artykule opisanym, którymi się ukośne i proste pryzmata for-

X miuą,

TAA: XI.  
FIG: 12,  
i 13.

muia, wynika łacny sposób mierzenia pryzmatów ukośnych. Jeśli bowiem dwa pryzmata mające też samą bazę, ukośne  $abcdefghik$ , i proste  $ABCD EFGHIK$ , tak postawione obok z sobą będą, że się zamkną i zmieszczą między dwoma płaszczyznami, któreby do siebie paralele były, ukaże się na oko, iż wielkość albo pełność tych dwu solidów zgola też sama będzie.

Gdy się bowiem przez iakikolwiek punkt wysokości na przykład  $P$ , przeprowadzi wtkroś pryzmatów iakikolwiek płaszczyzna bazom onych paralela, sekcyje  $NOPQR$ ,  $nopqr$  w obu pryzmatach uczynione, mogą być wzięte za onych bazy  $ABCKI$ ,  $abcki$ , tym sposobem ku  $NOPQR$ ,  $nopqr$  pomknięte, którym te dwa pryzmata są uformowane; a tak te dwie sekcyje będą dwa równe poligony.

Jeśli zaś wszystkie sekcyje, które w tych dwu pryzmatach rzeczonym sposobem uczynione być mogą, a być mogą prawie niezliczone, są iedne drugim równe, summy też onych, to jest same pryzmata równe być muszą.

Ta

Ta propozycya tak się pospolicie wyraża: pryzmata ukośne są równe <sup>Pryzmata</sup> pryzmatom prostym, dgy onych bazy, i <sup>ukośne są</sup> <sup>równe pryz-</sup> <sup>matom pro-</sup> <sup>stym, gdy o-</sup> <sup>nych bazy i</sup> <sup>wysokości są</sup> <sup>równe.</sup> <sup>Przez wysokość</sup> <sup>zaś rozumie się</sup> linia perpendykularna spuszczone z wierzchney bazy do dolney, albo do płaszczyzny, na której dolna baza leży.

## XXV.

Ponieważ <sup>Toż mówić</sup> <sup>o równości</sup> <sup>parallelipi-</sup> <sup>pedów nko-</sup> <sup>śnych z pro-</sup> <sup>stem.</sup> <sup>parallelipeda</sup> należą do liczby pryzmatów, więc to, cośmy <sup>o równości</sup> <sup>parallelipi-</sup> <sup>pedów nko-</sup> <sup>śnych z pro-</sup> <sup>stem.</sup> dopiero mówili o pryzmatach, ma się stosować do <sup>parallelipipedów</sup> <sup>ukoś-</sup> <sup>stem.</sup> nych. Są to figury  $abcdefgh$ , które się <sup>TAB: XII.</sup> <sup>FIG: 1, 2.</sup> formuią przez kwadrat, rektangul, albo też <sup>parallelogram</sup>, tak pomykane w górę, że cztery onych anguły trzymają się linii, które do siebie paralele, a do bazy ukośnie stoją. A tak <sup>parallelipiped</sup> ukośny  $abcdefgh$  będzie równy prostemu  $ABCDEFGH$ , jeśli bazy  $abgh$ ,  $ABGH$ , i perpendykularne spuszczone z płaszczyzn wierzchnych  $dce$ ,  $DCFE$ , na płaszczyzny dolne  $abgh$ ,  $ABGH$ , będą równe.

X2

XXVI.



## XXVI.

Przypatrzwszy się *parallelopipedom* i *pryzmatom*, obróćmy oczy na *piramidy*, to jest na *solida* takie, iakie jest *ABCDEFGG*, zewsząd określone pewną liczbą *tryangulów*, które mając spólny *wierzchołek A*, osadzone są na bokach iakiegokolwiek *poligonu BCD EFG* za bazę figurze pełney służącego. Godne są uwagi te *solida* nie tylko dla tego, że się zdarzają w budowaniu, i dają się widzieć w starożytnych dziełach, iako to w *zwycięskich* i innych *pamiętnych znakach*, ale też dla tego nawet, że wszystkie inne *solida płasko-ścienne* składają się z *piramid*, tak iako *płaszczyzny prosto-ścienne* z *tryangulów*. W czym żebyśmy się upewnili, dosyć będzie z iakiegokolwiek punktu obranego wewnątrz iedney z brył *płasko-ściennych*, na przykład *kubusa*, albo *parallelopipedu*, poprowadzić *linie proste* do *angulów* tey bryły.

## XXVII.

## XXVII.

*Wielorakość* albo *różność* *piramid*, tak iako *pryzmatów* wyraża się przez nazwiska tych figur, które służą im za bazy.

## XXVIII.

Gdy *piramida* ma za bazę figurę TAB: XII. FIG: 3. 15. regularną, a z *wierzchołka* oney spuszczoney do *środku* *perpendykuł* trafia w bazy centrum *H*, tak iako w figurze 3: *piramida* w ten czas nazywa się *prostą*; przeciwnie zowie się *ukośną*, gdy *perpendykuł* z *wierzchołka* oney spuszczoney chybia centrum bazy, iako to widzieć można w figurze 5.

## XXIX.

Żebyśmy znaleźli sposób *mierzenia* wszelkich *piramid*, tak *prostych* iako też *ukośnych*, uczynmy niektóre *powszeczne* względem tych figur uwagi, do których są nam powodem wiadome już *własności* *pryzmatów*.

Gdy się.

Gdy się uważa równość pryzmatów mających też samą bazę i wysokość, naturalnie każdemu to na myśl przychodzi, że parallelogramy są także równe, gdy mają kondycje dopiero wyrażone; co się też iści o tryangulach. Te trzy prawdy tak razem w oczy wpadające, oraz podobieństwo niejakie parallelogrammów do pryzmatów, a tryangulów do piramid, pociągają nas do mniemania, że własności, które są wspólne parallelogrammom i tryangulom, mogą też być wspólne pryzmatom i piramidom. Zatem domyślać się już musimy, że piramidy mające też samą bazę i wysokość, mają też samą wielkość.

## XXX.

Uwagi następujące utwierdzą to mniemanie.

TAB: XII.  
Fig: 4, 15. Niech będą dwie piramidy ABC DE, *abcde*, mające też samą wysokość AH, *ah*, a za bazy dwie równe figury, na przykład dwa równe kwadraty BC DE, *bcd*e. Jeśli potniemy te dwie piramidy przez niezliczone płaszczyzny bazom

bazom onych parallele: wiadomo jest, iż ze wszystkich sekcji wynikną równe kwadraty IKLM, *iklm*; zatem te dwie piramidy tak uważane być mogą, iakby się składały z równej liczby warstwieńkończenie cienkich, z którychby każda w piramidzie iedney była równa korespondującej w piramidzie drugiej. Więc w iedney i w drugiej też sama będzie summa rzeczonych warstw, to jest dwie piramidy będą miały też samą wielkość.

Jeśli by dwie piramidy miały za bazy inne poligony regularne, albo też nie regularne BCDEF, *bcdef* sobie równe, każdy widzieć może, iż wszystkie sekcye albo warstwy bazom parallele IKLMN, *iklmn* iedney i drugiej piramidy, byłyby sobie równe, a zatem obie miałyby też samą wielkość, i skoroby miały też samą wysokość, i bazę.

## XXXI.

Labo wszystko to łatwo jest do pojęcia, i dosyć ma światła z owej demonstracyi, w której dowiedliśmy równości pry-



TAB: XII.  
Fig: 6,  
17. ści pryzmatów mających też samę wysokość i bazę: iednakże co się tycze podobieństwa, które jest między bazą BCDEF i warstą oney paralelą IKLMN w iakieykolwiek piramidzie, oraz równości warst korrespondujących IKLMN, *iklmn* we dwu piramidach też samę wysokość i bazę mających, to zda się wyciągać szczegulney demonstracyi; którą żebyśmy znaleźli, musimy wnieść w niektóre uwagi względem podobieństwa figur pełnych.

## XXXII.

TAB: XII.  
Fig: 6. Wróćmy się więc do piramidy ABCDEF. Ta niech będzie rozcięta przez płaszczyznę IKLMN paralełą do bazy. My dowieść mamy, że sekcyja albo warsta uformowana w piramidzie przez tę płaszczyznę jest poligonem zgoła podobnym do poligonu BCDEF, ba sama nawet piramida mnieysza HI KLMN zupełnie podobna do piramidy więkkszey ABCDEF, to jest anguły uformowane przez iakieykolwiek linie w piramidzie iedney będą równe korrespondu-

Naczym za-  
leży podobieństwo  
dwa pira-  
mid.

spõnduającym angułom w piramidzie drugiey, wszystkie zaś boki piramidy mnieyszey będą proporcjonalne bokom piramidy więkkszey.

## XXXIII.

Naypierwey uważmy, iż jeśli dwie TAB: XII.  
Fig: 8. płaszczyzny X, i Y, są paralele, a dwie iakieykolwiek linie ALD, AME, prowadzone z iednego punktu A, przechodzą wkróś przez te dwie płaszczyzny: linie proste LM, DE, które łączą punkta L, M, D, E, są paralele. Gdyby bowiem te dwie linie nie były paralele, tedy podłużone zeszłyby się z sobą gdziekolwiek; lecz jeśli by się te dwie linie zeszły z sobą, płaszczyzny, na których one leżą, i których opuścić nie mogą, podłużone także, gdziekolwiek zeyśćby się z sobą musiały; więc nie byłyby paralele, co jest przeciwko założoney suppozycyi.

## XXXIV.

Tym samym tedy, że płaszczyzna TAB: XII.  
Fig: 6. IKLMN jest paralela do płaszczyzny  
Y BCD.

BCDEF, wszystkie linie ML, LK, KI, IN, NM, będą paralele do linii ED, DC, CB, BF, FE; a co ztąd idzie, tryanguly ALM, AKL, AIK &c, będą podobne tryangulom ADE, ACD, ABC &c, tak dalece, że jeśli się weźmie w tych tryangulach ieden z boków na przykład AM, za spólną miarę albo za skalę wszystkich boków małej piramidy, a bok AE wziętemu korrespondujący za skalę boków wielkiej piramidy, łatwo będzie widzieć, że boki ML, LK, KI, &c poligonu IKLMN będą proporcjonalne bokom ED, DC, CB, &c poligonu BCDEFG.

Łatwo także da się widzieć, że wszystkie anguly IKL, KLM &c będą równe korrespondującym angulom BCD, CDE, &c ponieważ pierwsze będą uformowane przez linie paralele bokom drugich. Zatem dwa poligony IKLMN, BCDEF będą sobie podobne.

## XXXV.

Ponieważ tedy boki AM, AL, AK &c, są proporcjonalne bokom AE, AD, AC &c, anguly zaś ALM, ALK &c, są ró-

są równe angulom korrespondującym ADE, ADC &c dla podobieństwa tryangulów ALM, ADE, ALK, ADC &c: więc dwie piramidy AIKLMN, ABCDEF będą zgoła sobie podobne.

## XXXVI.

Na resztę jeśli się z punktu A, poprowadzi linia AH perpendykularna do płaszczyzny, na której ofadzony jest poligon BCDEF, a na punkcie Q spotka się ta perpendykularna z inną płaszczyzną, na której leży poligon IKLMN: wiadomo jest, że linie AQ, AH, albo wysokości dwu piramid AIKLMN, ABCDEF, będą miały też samę do siebie relacyę, którą mają korrespondujące onych boki AM, AE, AL, AD &c: albo co na toż samo wychodzi, iż jeśli wysokości AQ, AH, wzięte będą za skalę dwu piramid, liczba części ze skali AQ zawartych w AM, i w AL, będzie równa liczbie części ze skali AH, zawartych w AE, i w AD.



## XXXVII.

TAB: XII.

Fig: 6, i 7.

Wróćmyż się dopiero do dwu owych piramid  $ABCDEF$ ,  $abcdef$ .

Te gdy obie razem weźmiemy na uwagę, łącno postrzeżemy, że dwie sekcyje albo warsty  $IKLMN$ ,  $iklmn$ , są podobne sobie tym samym, że są podobne swym bazom  $BCDEF$ ,  $bcdef$ , które się zgoła między sobą nie różnią. Nad to rzeczzone dwie warsty są równe sobie, ponieważ mają za skale dwie linie równe  $AQ$ ,  $aq$ , to jest wysokości piramid  $AIKLMN$ ,  $aiklmn$ .

Piramidy  
mające też  
sąmę wyso-  
kość i bazę  
są równe.

Więc niewiedząc nawet iaka jest wielkość albo pełność piramid, już wiemy pewnie, że piramidy mające też samę wysokość i bazę, są równe, tak iakośmy się w przód domyślali. (Artyk: XXIX.)

## XXXVIII.

Dwie pira-  
midy są tak-  
że równe,  
gdy mają też  
sąmę wyso-  
kość, a bazy  
co do figury  
róż-

Gdyby bazy dwu piramid równie wyfokich nie były też same, ale tylko co do rozciągłości równe, piramidy w tym nawet razie byłyby równie wielkie. Niech bowiem będą dwie piramidy

dy  $abcdef$ , [\*]  $arst$  mające też samę różną, i zgo-  
wysokość  $ah$ ; jeśli się one rozetną przez <sup>fa sobie nie</sup>  
iakołkolwiek płaszczyznę <sup>podobne, ale</sup>  $parallelę$  do <sup>co do rozcią-</sup>  
bazy, iawno jest, iż <sup>głości rów-</sup>  $area\ iklmn$  tak się <sup>ne.</sup>  
będzie miała do arei  $bcdef$ , iako  $area\ uxy$  [\*] TA: XII.  
do arei  $rst$ ; ponieważ  $iklmn$ ,  $bcdef$  bę- Fig: 7, i 9.  
dąc (Artyk: XXXIV) figurami podo-  
bnemi, nie różnią się od siebie iak tylko  
przez swe skale  $aq$ ,  $ah$ , &c, te zaś figu-  
rom  $uxy$ ,  $rst$ , takóž podobnym służą też  
za różnicę. (I. Części Artyk: XLVIII.)

Lecz jeśli bazy  $rst$ ,  $bcdef$ , co do rozciągłości są równe, proporcjonalne onych części  $uxy$ ,  $iklmn$ , równe też być muszą. Więc wszystkie sekcyje albo warsty dwu piramid  $arst$ ,  $abcdef$ , będą miały też samę rozciągłość. Zatem onych summy, to jest same piramidy będą równie wielkie.

## XXXIX.

Gdyby baza  $bcdef$  była wielokrot-  
na względem bazy  $rst$ , wielkość też al-  
be pełność piramidy  $abcdef$  byłaby ty-  
lekrotna względem pełności piramidy  
 $arst$ , to jest tyle razy zawierałaby iedna  
drugą, ile razy baza bazę.

Na

Piramidy  
mające też  
sąmę wyso-  
kość, zachod-  
wią też sa-  
mę do siebie  
relacyą, któ-  
ra zachodzi  
między o-  
nych buza-  
mi.

Na ów czas bowiem podzieliwszy bazę  $bcdef$  na wiele części, z którychby każda była równa bazie  $rst$ , możnaby tak uważać piramidę  $abcdef$ , iakoby złożona była z wielu innych piramid mających za bazy części owe, na które podzielona jest  $bcdef$ . Lecz każda z tych nowych piramid równałaby się piramidzie  $arst$ , iako się dowiodło w Artykule przeszłym. Włec &c.

Jeśliżby zaś baza  $bcdef$  nie była doskonale wielokrotna względem bazy  $rst$ , to jest, jeśliżby ją zawierała kilka razy, i nadto iakąkolwiek oney część, tak iednak żeby obie te bazy miały spólną sobie miarę  $X$ : w tym razie podzieliwszy tak  $bcdef$ , iako też  $rst$ , na części równe owej spólney mierze, widzielibyśmy że dwie piramidy  $abcdef$ ,  $arst$ , składałyby się z tylu piramid sobie równych, ile we dwu bazach zawierałoby się części  $X$ . Włec piramida  $abcdef$  takby się miała do piramidy  $arst$ , iako baza pierwszey do bazy drugiej.

Nawet chociażby bazy nie mogły mieć spólney miary, zawsze iednak byłaby piramida do piramidy, iako baza do bazy;

bazy; á to jest, co się wywieść mogło sposobem owym, któregośmy użyli w Artykule XXVIII wtórey Części, gdzie się czyniła komparacya figur płaskich mających takie boki, które spólney miary mieć niemogą. Miara bowiem  $X$ , gdy się przez dywizyą kilkakrotną zmniejszy, á do małości prawie nieskończoney przyprowadzi, może być wzięta za miarę spólną tak bazie  $rst$ , iako też bazie  $bcdef$ .

## X L.

Doszedłszy tego, że piramidy mające też samę wysokość są w proporcji z bazami, to jest, że iedna ma się do drugiej iako baza do bazy: już wiedzieć należy, że wymiar onych mało co zawiera trudności.

Do tego bowiem, żebyśmy wszystkie piramidy mierzyć umieli, nie potrzeba więcej iak wiedzieć sposób mierzenia iedney. Daymy naprzykład, że TAB: XII.  
Fig: 10.  
i 11. umiemy mierzyć piramidę  $ABCDE$ , á zdarza się nam do wymiaru piramida  $ASTUXY$ , która ma bazę i wysokość zgo-



zgoła od pierwszej różną: naprzód tedy postawimy piramidę podobną piramidzie  $ABCDE$ , a mającą wysokość piramidy  $ASTUXY$ : co się łatwo da wykonać przez samo tylko podłużenie boków  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  $AE$ , (Artyk. XXXV) i onych ucięcie przez płaszczyzną  $LMNO$ , któreby odległość  $AG$ , od wierzchołka  $A$ , była równa wysokości  $AQ$ .

Dopieroż ponieważ wedle suppozycji umiemy mierzyć piramidę  $ABCDE$ , wiadomo jest, że trafiemy też mierzyć piramidę  $ALMNO$ , pierwszej podobną. Iakiekolwiek bowiem są operacje, które wchodzą do piramidy  $ABCDE$ , wszystkich tych zgoła użyć możemy do wymiaru podobnej piramidy  $ALMNO$ , to tylko wyjąwszy, że taż sama skala, która służy pierwszej, nie może być użyta do drugiej.

Daymy więc, że piramida  $ALMNO$  już jest wymierzona: wymiar ten przyprowadzi nas do wymiaru piramidy  $ASTUXY$ , ponieważ według Artykułu przeszłego tak się ma piramida  $ALMNO$  do piramidy  $ASTUXY$ , iako

ko baza  $LMNO$  do bazy  $STVXY$ , a w Części drugiej jest sposób determinowania tej relacji, którą ma baza do bazy.

## X L I.

Ponieważ tedy do wymiaru wszystkich zgoła piramid, które tylko być mogą, nie potrzeba więcej iak wiedzieć sposób mierzenia jednej, obierzmyż z nich bardzo prostą, i do wymiaru łatwą, na przykład tę, którą formować można, TAB: XII.  
FIG: 12. prowadząc ze czterech anaulów  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $H$ , jednej ściany kubusa  $ABCDEFGH$ , cztery linie do centrum  $O$ , to jest do punktu równie od  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $H$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , odległego.

Piramida tak uformowana widomie jest szóstą częścią kubusa, ponieważ rozebrać go można na sześć takich piramid, biorąc każdą z sześciu ścian za bazę. Lecz walorem, albo pełnością kubusa jest produkt z wysokości  $AF$ , moltiplikowanej przez bazę  $ABCH$ ; Więc chcąc mieć walor, albo pełność piramidy, trzeba podzielić rzeczony

Z

pro-

produkt z  $AF$ , i  $ABCH$ , na sześć części równych, albo co na toż samo wychodzi, trzeba mnożyć szóstą część wysokości  $AF$  przez bazę  $ABCH$ . Aże szóstą część wysokości  $AF$  jest trzecią częścią wysokości  $OL$  piramidy  $OABCH$ , ponieważ wysokość  $OL$  jest połową boku Kubusa: idzie zatem, iż miarą piramidy  $OABCH$  jest produkt z trzeciej części wysokości mnożony przez bazę.

## XLII.

TAB: XII.

FIG: 13.

Niech dopiero dana będzie do wymiaru iakakolwiek piramida  $OKMNSTV$ , postępujemy z nią w ten sposób: postawiwszy sobie na myśli taki kubus, którego by ściana  $AB$ , albo  $AF$ , była wedwoie większa za wysokość  $OL$  danej piramidy, imaginować w nim będziemy piramidę  $OABCH$ , któraby miała centrum kubusa za wierzchołek, a jedną z sześciu ścian na przykład  $ABCH$  za bazę. Tę nową piramidę też sama będzie wysokość co i pierwszy; zatem (Artyk: XXXIX.) Peł-

ność

ność  $OABCH$  będzie do pełności  $OKMNSTV$ , iako baza  $ABCH$  do bazy  $KMNSTV$ . Aże według Artykułu przeszłego, produkt z trzeciej części wysokości spójnej  $OL$  mnożony przez bazę  $ABCH$ , jest walo-rem piramidy  $OABCH$ ; Więc produkt z trzeciej części tejże wysokości spójnej  $OL$ , mnożony przez bazę  $KMNSTV$ , będzie walo-rem piramidy  $OKMNSTV$  do wymiaru danej.

A ztąd wynika to powszechne Theorema: że każda piramida ma za miarę produkt z bazy mnożony przez trzecią część wysokości.

Wielkość albo pełność każdej piramidy, jest to produkt z bazy mnożony przez trzecią część wysokości.

## XLIII.

Ponieważ według Artykułu XXI, Każda piramida jest pełność iakiegokolwiek pryzma, jest to trzecią częścią takiego pryzma, które ma tę samą bazę i wysokość co piramida. produkt z bazy mnożony przez wysokość, rzecz jest iasna z Artykułu przeszłego, że piramidy będą zawsze trzecią częścią pryzmatów mających też samą bazę i wysokość.

Z 2

XLIV.



## XLIV.

Po wymierze solidów płaskimi ścianami określonych, przedsięwzięmy szukać drogi, którąbyśmy przyiść mogli do wymiaru tych, których zwierzchnie rozciągłości są krzywe, czyli raczy okrągło wypukłe. Aże w trzeciej Części nie traktowaliśmy o żadnych innych figurach prócz owych, których obręby składają się z łuków cyrkulu, więc i tu weźmiemy na uwagę te tylko solida, których krzywości czyli wypukłości są cyrkularne.

W uważaniu zaś takowych solidów, zakładamy sobie te dwie rzeczy: wymiar zwierzchnych rozciągłości, i walor pełności. Ponieważ bowiem te zwierzchnie rozciągłości albo zgoła wypukłe, albo po części wypukłe, a po części płaskie są: wymiar onych nie może być odesłany do pierwfzey Części, tak iako był odesłany wymiar płaszczyzn za ściany solidom flużących.

XLV.

## XLV.

Zewszystkich solidów okrągło-wypukłych nayprostszy i nayłacnieyszy jest Cylinder albo wał okrągły. Jest to bryła ABCDEF, którey dwie bazy ABC, DEF są dwa równe cyrkule leżące do siebie paralele, a połączone przez płaszczyznę koła periphery onych obwiedzioną.

Gdy te dwa cyrkule taką mają pozycyą, że linia podniesiona perpendykularnie z centrum H, przechodzi przez centrum G, cylinder zowie się prostym.

Przeciwnie Cylinder zowie się ukośnym, gdy linia przez dwa centra G, i H, prowadzona, nie jest do cyrkulów ABC, DEF perpendykularna.

## LXVI.

Sposób Geometryczny, którym się formułą te solida, podobny jest owemu, któryśmy opisali w Artykule XVII mówiąco o pryzmatach i parallelopipedach. Podobnie bowiem imaginować można, że się

TAB. XIII.

FIG. 1, 2.

Cylinder jest to bryła mająca za dwie bazy dwa równe cyrkule leżące do siebie paralele, a połączone przez płaszczyznę koła periphery onych obwiedzioną.

FIG. 1.

Różnica Cylinderów prostych i ukośnych.

FIG. 2.

że się cylinder formuje, gdy iakikolwiek cyrkuł tak się w górę pomyka, że każda z nowych pozycyi, których on nabywa, jest do pierwzey parallela, a wszystkie punkta cyrkułu razem z nim pomykane piszą linie parallele, które się nad płaszczyzną cyrkułu podnoszą.

## XLVII.

Do wymiaru zwierzchney rozciągłości cylindra prostego przyść można sposobem następującym. Podzieliwszy  
 TAB: XIII. obie periphery ABC, DEF cyrkułów  
 FIG: 1. za bazy służących, na tąż samą liczbę równych części, z punktów dywizyi korrespondujących w iedney i drugiej periphery poprowadźmy linie, któreby związały korrespondujące takż anguły dwu poligonów regularnych z tey samey operacyi wynikających. Widomo jest, że się uformuje pryzma, którego zwierzchna rozciągłość składać się będzie z tylu rektangulów na cylindrze napisanych, ile będzie boków zawartych w każdej ze dwu periphery ABC, DEF. Aże każdy z tych rektangulów będzie

miał

miał wysokość równą linii AD: więc miarą wszystkich razem wziętych, będzie produkt z wysokości AD multiplikowanej przez sumę wszystkich baz, to jest przez obręb poligonu zawartego w cyrkule DEF, albo ABC.

Ponieważ zaś obręb tego poligonu tym bardziej zbliżać się będzie do równości z periphery cyrkułu, a zwierzchna rozciągłość rzeczzonego pryzmy z rozciągłością zwierzchną cylindra, im bardziej liczba boków poligonu powiększać się będzie przez podział: idzie zatem, iż gdy liczba boków uroście w nieskończoną, pryzma różnić się nie będzie od cylindra. Zatem zwierzchna rozciągłość prostego cylindra równa jest rektangulowi mającemu AD za wysokość, a linią prostą równą periphery DEF za bazę.

Ta propozycja zgodzić się może do wyrachowania, wieleby naprzykład potrzeba było materyi na obicie iakiey kolumny mającey kształt cylindra, albo na wybicie wewnątrz iakiey wieży okrągłej.

Zwierzchna rozciągłość cylindra równa jest rektangulowi mającemu AD za wysokość, a za bazę linią prostą równą periphery jednego ze dwu cyrkułów za bazy temuz cylindrowi służących.

## XLVIII.



## XLVIII.

Co się tycze zwierzchney rozciągłości ukośnego cylindra, tey wymierzyć nie można podanym dopiero sposobem, ponieważ zamiast rektangulów, które z przeszley operacyi wyniknęły, mielibyśmy parallelogrammy różnych wysokości. Geometrowie używszy sposobów bardzo trudnych i zawikłanych, ledwo do tego przyszl, że wyrachować mogą walor tey zwierzchney rozciągłości od prawdziwego nie daleki. To i podobne temu Problemata wyszły z granic początków Geometrycznych.

## XLIX.

Względem pełności Cylindra tak prostego, iako też ukośnego, nie niemasz łacnieyszego, iak onę determinować. Widomo bowiem iest, iż wszystko to, co się mówiło o przyznatach, stosować można do cylindrów, mając każdy cylinder za ostatnie przyzma ze wszystkich owych, które się weń w mieścić, albo, iak mówią Geometrowie, wpisać mogą.

Cylindry  
mające też  
samę wyso-  
kość i bazę,  
są równe so-  
bie co do peł-  
ności.

A tak Cylindry mające też samę wysokość, i bazę, będą sobie równe co do pełności.

L.

## L.

Miarą więc każdego cylindra iest produkt z bazy moltiplikowaney przez onego wysokość.

Miara cylin-  
dra iest pro-  
dukt z bazy  
moltipliko-  
waney przez  
wysokość.

## L.I.

Konus między solidami po cylindrze nayprostszy, iest to figura pełna ABCDE, której bazą iest cyrkuł, a zwierzchną rozciągłością zbiór niezliczonych linii prostych, które poczynając się u wierzchołka A, kończą się u periferyi BCDE cyrkułu za bazę służącego. Konus może być wzięty za piramidę mającą cyrkuł za bazę.

TAB: XIII.  
Fig: 3. i 4.

Konus iest  
to piramida  
mająca za  
bazę cyrkuł.

## L II.

Ieśli linia podniesiona perpendykularnie z centrum bazy O, przechodzi przez konusa wierzchołek A, tak, iako w figurze 3, konus zowie się prostym; przeciwnie zowie się ukośnym, ieśli perpendykularna podniesiona z centrum wymija wierzchołek konusa, tak iako w figurze 4.

TAB: XIII.  
Fig: 3. i 4.  
Różnica ko-  
nusów pro-  
stych i ukoś-  
nych.

Aa

LIII.

## LIII.

Wymiar zwierzchney rozciągłości konusa prostego ułacnia się przez owę uwagę, którąśmy wyżej namienili, że konus może być wzięty za piramidę.

TAB: XIII. Gdy się bowiem konus prosty ABC-

Fig: 3.

DE weźmie za ostatnią ze wszystkich owych piramid, które weń wpisane być mogą, to jest gdy się periphery bazy BCDE rozdzieli tak, iako rozdzielona była periphery cylindra, na nieskończoną liczbę małych boków; dopieroż gdy się poprowadzą linie ze wszystkich an-gułów poligonu tym sposobem uformo-  
wanego do wierzchołka A, pokaże się jawnie, że zwierzchna rozciągłość ko-  
nusa ABCDE składa się z nieskończo-  
ney liczby małych tryangulów izosce-

Miarą  
zwierzchney  
rozciągłości  
konusa pro-  
stego jest  
produkt z  
półowy bo-  
ku multi-  
plikowaney  
przez pery-  
feryę bazy.

lów, których wysokość równa się konu-  
sa bokowi AB, a wszystkie bazy w ie-  
dnę sumę zebrane równe są periphery  
BCDE. Zkąd łącno wniesć można,  
że miarą tej zwierzchney rozciągłości  
jest produkt z półowy boku AB multi-  
plikowaney przez periphery BCDE.

## LIV.

## LIV.

Jeśli dopiero przywiedziemy sobie na pamięć, że rozciągłość sektora cyr-  
kulu jest równa (III. Części Artyk: X)  
produktowi z łęku tegoż sektora mul-  
typlikowanego przez półowę promie-  
nia, łącno postrzeżem, że chcąc powlec  
konus prosty ABCDE iaką materią, TAB: XIII.  
na przykład Adamaszkim, Aksamitem Fig: 3.  
&c, trzebaby uformować z tejże mate-  
ryi sektora, którego by promień równał  
się bokowi AB, a łęk periphery BCDE.  
Zwierzchna  
rozciągłość  
konusa pro-  
stego jest to  
sektor cyr-  
kulu.

## LV.

Gdy konus jest ukośny, zwierzchna onego rozciągłość nie mniej trudna  
jest do wymiaru, iako zwierzchna roz-  
ciągłość cylindra ukośnego, nawet gdy-  
by szło o walor oney, któryby nie był  
daleki od prawdziwego. To Problema  
jest także nad początki Geometryczne.

## LVI.

Względem pełności konusów tak  
prostych iako też ukośnych: wzięwszy

Aa 2

one



one za piramidy ostatnie ze wszystkich owych, któreby się w nie wmieścić albo raczy wpisać dały, można będzie wszystko to do nich stosować, co się ogólnie mówiło o piramidach.

Konusy  
mające też  
same bazy i  
wysokości,  
są równe.

Zatym konusy mające też same bazy i wysokości, będą sobie równe.

## LVII.

Pełnością  
konusa jest  
produkt z  
bazy mul-  
typlikowa-  
ney przez  
trzecią część  
wysokości.

Pełnością zaś każdego konusa będzie produkt z bazy multiplikowaney przez trzecią Część wyfokości.

## LVIII.

TAB: XIII.  
Fig: 5, i 6.

Zdarza się czasem potrzeba wymierzania takiej bryły, iaka jest BCD-EFGH, konusem uciętym nazwana. Jest to pozostała część konusa AFGH, po odcięciu mnieyszego konusa ABC-DE, przez sekcyą uczynioną parallele do bazy FGH. Widomo zaś jest, że miarą tego ucinka będzie różnica między pełnościami dwu konusów ABC-DE, AFGH.

## LIX.

## LIX.

Gdy konus ucięty jest częścią konusa prostego, zwierzchna onego rozciągłość może być determinowana nie tylko przez wymiar osobny zwierzchnych rozciągłości dwu konusów, i subtrakcyą iedney od drugiej, ale też prościey iefzcze i naturalniey sposobem następującym, któremu wiele dodaie światła Artyk: LIV.

Daymy że ALR jest ów sektor, TAB: XIII. który trzebaby uformować, gdyby konus AFGH, miał być iaką materią powleczoney. Gdy w tym sektorze z centrum A, promieniem AM równym bokowi mnieyszego konusa AB, napisany będzie łęk MP, rozciągłość MP-RL widomie będzie częścią pierścienia służącą za powłokę konusowi nciętemu, o którego zwierzchną rozciągłość tu idzie. Dopieroż gdyby dwie periphery, których MP, i LR, są podobne łęki, zupełnie dokończone były, mielibyśmy cały pierścień, którego miarą (III. Części Artyk: VIII. ) byłby produkt z ML, albo z BF, to jest z różnicy promieni AL,

Sposób,  
którym się  
wymierza  
zwierzchna  
rozciągłość  
konusa ucię-  
tego, gdy  
konus jest  
prosty.

AL, AM, albo boków AF, AB, multiplikowaney przez perferyą napisaną promieniem AN, którego koniec N przypada na środek linii ML; więc część pierścienia MPRL, to jest powłoka, czyli zwierzchna rozciągłość konusa uciętego BCDEFGH będzie miała za miarę produkt z linii ML multiplikowaney przez łęk NQ, albo, co na toż samo wychodzi, produkt, który wyniknie, gdy bok ucięty konusa BF będzie multiplikowany przez perferyą IKL, która się uformuje za rozcięciem tegoż konusa przez płaszczyznę paralelę do bazy, a przechodzącą przez I średni punkt boku BF.

## L X.

Co to jest  
Sfera albo  
Kula?

Ostatnia z wielkości trzy dymensye mających, o której mówić nam zostaje, zowie się Sferą, albo Kulą. Jest to figura pełna, której zwierzchna rozciągłość ma wszystkie swe punkta równie odległe od owego, który iey służy za centrum. Zdarza się częstokroć potrzebą tey zwierzchney rozciągłości, naprzy-

na przykład do determinowania wielęby wynieść mogło pozłoty na jaką gałkę: blach miedzianych, lub ołowianych, na pokrycie iakiey kopuły &c.

## L X I.

Niech będzie do wymiaru dana TAA: XIII. zwierzchna rozciągłość sfery X: wido- Fig: 8.  
mo jest, iż onę tak imaginować można, iakoby uformowana była przez obrót pół cyrkulu AMB koło dyamentu swego AB. My zamiast pół-cyrkulu weźmiemy poligon regularny mający nieskończoną, albo przynajmniej bardzo wielką liczbę boków małych, a założmy sobie wymierzyć rozciągłość Z, to jest is- TAB: XIII.  
den tylko z pasów, które uformuje po- Fig: 9.  
ligon, gdy tak iako pierwey cyrkul, koło dyamentu swego obracany będzie. Wymiar tego pasa pokaże nam i ulacni drogę do wymiaru zwierzchney rozciągłości sfery, tak, iako wymiar figur prostościennych był przewodnictwem do wymiaru cyrkulu.

## L X I I.



TAB: XIII.

Fig: 9.

Uważmy tedy figurę tego pasa, albo tey zwierzchney rozciągłości, którą formuie ieden z boków  $Mm$  poligonu w cyrkuł wpisane, i z nim razem obracane koło dyamentu  $AB$ . Widomo jest, iż ten bok  $Mm$  pisze swym obrotem zwierzchną rozciągłość konusa

TAB: XIV.

Fig: 1.

uciętego  $V$ . Gdy się bowiem  $Mm$  tak podłuży, że się na punkcie  $T$  spotka z dyamentem  $AB$  także podłużonym, linia  $TMm$  koło tegoż dyamentu iako koło osi obracana razem z pół-cyrkułem  $AMB$ , oczewiście napisze konus prosty, którego wierzchołkiem będzie  $T$ , a bazą cyrkuł napisany punktem  $m$ , tak dalece, że zwierzchna rozciągłość  $V$ , przez obrót boku  $Mm$  uformowana, będzie pasem tegoż konusa zawartym między płaszczyznami cyrkułów, które napisały punkta  $M, m$ , w koło obracane. Lecz według Artykułu LIX, zwierzchna rozciągłość  $V$ , równa jest rektangulowi mającemu za wysokość bok  $Mm$ , a za bazę linią równą periphery  $KLO$  napisanej punktem  $K$ , który jest środkiem

kiem boku  $Mm$ ; więc zwierzchna rozciągłość uformowana przez obrót poligonu równa jest summie wszystkich takich rektangulów, których tyle będzie, ile jest w półowie poligonu boków  $Mm$ .

Aże wszystkie poligonu boki, albo tych rektangulów wysokości  $Mm$  przez suppozycyą są równe: więc możnaby wziąć całą zwierzchną rozciągłość, o którą tu idzie, za ieden rektangul mający wysokość  $Mm$ , a bazę równą summie wszystkich takich periphery, iaka jest  $KLO$ , to jest napisanych punktem średnim każdego boku.

Lecz małość wysokości  $Mm$ , a zbyt wielkość bazy, wynikające z wielkiej liczby boków, którą wedle założoney suppozycyi na poligon w pół-cyrkule  $AMB$ , zatrudniaią albo raczy zgoła niepodobną czynią tego rektangułu konstrukcyą.

Zebyśmy się tedy wywikłali z tey trudności, rzecz jest naturalna pomyśleć o zamianie wszystkich tych małych rektangulów na inne, któreby mając iedną spólną wysokość, znacznie iednak od pierwszey  $Mm$  większą, miały tym

Bb

sa-

samym bazy nie równie od pierwszych mnieysze. Tak bowiem wszystkie małe bazy w jedną sumę zebrane uczyniłyby jedną długość, nie tak jak pierwszej względem wysokości niezmiernie wielką.

## L X I I I.

Obaczmyż jeśli się nam uda ta zamiana. Zebyśmy zaś ułacnili to Problem, połączmy: że nasze rektanguly z TAB: XIV. miały linii prostych równych peripheryom  
Fig: 1, 12. K L O mają za bazy promienie K I, któremi te peripherye są napisane. Wszystko to; co się tym rektangulom nadarzyć i służyć może, łączno będzie stosować do owych, które nam są potrzebne.

Cała tedy rzecz jest na tym, żebyśmy znaleźli taki rektangul, któryby miał za miarę produkt z linii  $Mm$  moltiplikowaney przez K I, a za wysokość iakąkolwiek linią od  $Mm$  nie równie większą, któraby w każdej pozycyi tegoż boku  $Mm$  zawsze była tey samey wielkości. Weźnimy na przykład linią C K, to jest perpendykul polygonu, którego  $Mm$  jest bokiem. Ten bowiem perpen-

perpendykul, do któregokolwiek boku należeć będzie, nieodmiennie tę samą zachowa wielkość. Mamy tedy szukać linii prostej, któraby moltiplikowana przez C K, dała produkt równy produktowi wynikającemu z moltiplicacyi promienia K I przez  $Mm$ ; to jest (II. Części Artyk: VII,) mamy znaleźć czwartą proporcjonalną trzem liniom danym C K, K I,  $Mm$ . Aże wiadomo jest, że przez konstrukcyą tryangulów podobnych znajduią się w figurach linie proporcjonalne; trzeba zatem uformować podobne sobie tryanguly, którychby korrespondującemi bokami były trzy linie dane, razem z czwartą, której szukamy. To się zaś wykona, kiedy się spuści M R perpendykularna do  $mp$ . W ten czas bowiem tryanguly  $MRm$ , K I C będą podobne, mając anguly R, I, proste, a zaś  $mMR$ , I K C równe, przeto, że pierwszy z nich wzięty z angulem  $MmR$ , drugi zaś z angulem M K I równym angulem  $MmR$ , czynią angul prosty.

Z tad już łączno wniesć można, że tak się ma C K do K I, iako  $Mm$  do M R;

Bb 2 to



to jest, że  $MR$  jest czwartą proporcjonalną, której szukamy; albo, co na toż samo wychodzi, że rektangul z  $CK$ , i  $MR$ , albo  $Pp$ , równy jest rektangulowi z  $Mm$ , i  $KI$ .

Jeśli zaś nowa trudność ztąd wynika, że rektangul ów, o którego zamiannę idzie, nie jest produktem z  $Mm$ , i  $KI$ , ale raczej z  $Mm$ , i periferii, której  $KI$  jest promieniem: dość będzie przypomnieć sobie, że periferie są w proporcji promieni. A to jest, co czyni, że równość zachodząca między dwoma rektangulami, jednym z  $Mm$ , i  $KI$ , a drugim z  $Pp$ , i  $CK$ , ciągnie za sobą koniecznie równość dwu także rektangulów, jednego z  $Mm$ , i periferii  $KI$ , drugiego zaś z  $Pp$ , i periferii  $CK$ . Łacno bowiem widzieć można, iż gdy dwa rektanguly są równe, będą też równe w ten czas nawet, gdy się bazy onych proporcjonalnie powiększą, a wysokośći nienaruszone zostaną.

## LXIV.

Gdy tedy rzecz jest iasna ze dwu przeszłych Artykulów, że wszystkie zwierz-

zwierzchnę rozciągłości konusa ucięte. TAB: XIV.  
go, iaka jest naprzykład  $V$ , równe są re- FIG: 1.  
ktangulom mającym za spólną wysokość linią równą periferii napisanej promieniem  $CK$ , a za bazę linię prostą  $Pp$  korrespondującą każdemu z boków  $Mm$ : wnieść już należy, że iakakolwiek summa tych zwierzchnych rozciągłości wziętych naprzykład od  $A$ , aż do  $p$ , równa będzie rektangulowi mającemu za wysokość linią równą periferii napisanej promieniem  $CK$ , a za bazę summę wszystkich tych linijek  $Pp$  liczonych od  $A$ , aż do  $p$ , to jest linią prostą  $Ap$ . FIG: 2.

Więc chcąc mieć całą zwierzchną rozciągłość przez obrót poligonu uformowaną, trzeba napisać rektangul, któryby miał bazę równą periferii napisanej promieniem  $CK$ , a wysokość równą dyamentrowi  $AB$ .

## LXV.

Łacno już dopiero mierzyć zwierzchną rozciągłość sfery. Rzecz bowiem iasna jest, że figura pełna przez obrót poligo-

poligonu uformowana, tym bardziej zbliży się do równości z sferą, a perpendykuł CK do równości z promieniem, im więcej boków mieć będzie poligon, tak dalece, że jeśli poligon zamie-

ni się w cyrkuł, perpendykuł CK stanie się promieniem, a zwierzchna rozciągłość sfery będzie równa płaszczyźnie prostokąta mającego za wysokość dyameter, a za bazę linią równą perferyi cyrkułu, który obrótem swym koło dyametr uformował sferę, po spolicie wielkim sfery cyrkułem zwany.

## LXVI.

TAB: XIV.

Fig: 3.  
Coto jest segment sfery, i jak się mierzy zwierzchna onego rozciągłość?

Co się tycze zwierzchney rozciągłości segmentu sfery AMLNO, to jest części odciętej przez płaszczyznę MLNO perpendykularną do dyametr: ten uciniek ma za miarę produkt z swej grubości, albo z linii AP mierzącej tę grubość, a nazwaney strzałką, i z perferyi wielkiego cyrkułu AMBN. Co się tak wywodzi, iako się wyżej wywiodło (Artyk: LXIV.), że summa zwierzchnych rozciągłości wszystkich konu-

konusów uciętych, a między punktami TAB: XIV. A, i m, zawartych, równa jest rektangulowi, którego wysokość jest Ap, a baza linia równa perferyi napisaney promieniem CK. Fig: 2.

## LXVII.

Opisany dopiero sposób, którym się wymierza zwierzchna rozciągłość sfery, pokazuje nam, że gdyby rektangul ABDE był obratany razem z półcyrkułem AMNB, koło dyametr AB, zwierzchna wypukłość prostego cylindra EFGIKDH, napisana obrótem tego rektangulu, byłaby równa zwierzchney wypukłości sfery napisaney obrótem półcyrkułu. Co się po spolicie tak wyraża: zwierzchna rozciągłość sfery, równa jest zwierzchney rozciągłości opisanego koła niey cylindra, prócz dwu cyrkułów za bazy mu służących. Fig: 4.

Zwierzchna rozciągłość sfery jest równa zwierzchney rozciągłości cylindra koła niey opisanego.

## LXVIII.

Zatym, gdyby rozcięto tak cylinder, iako i sferę przez dwie płaszczyzny do dyametr AB perpendykularne na pun-



Warsty różnokształtne punktach P, i Q, dwa te solida z obu-  
wno-grube stron obcięte miałyby równe zwierz-  
sfer i cylin- chne rozciągłości, jedną przez obrót li-  
dra kołowej opi sanego niał OS, drugą przez obrót łęku MN  
maia równe zwierzchne rozciągłości. uformowane.

## LXIX.

Ieszcze z przeszłych Artykułów i  
Zwierzchna to się łączy wnoś, że zwierzchna roz-  
rozciągłość sfery weczworo jest większa za  
sfery we- czworo jest większa za  
większa za areę wielkiego swego cyrkulu, albo, co  
areę wiel- toż samo jest, równa się wielkiemu swe-  
kiego swego mu cyrkulowi cztery razy wziętemu.  
cyrkulu.

Area bowiem wielkiego tego cyrkulu  
ma za miarę produkt z połowy promie-  
nia, to jest z czwartey części dyame-  
tru moltiplikowaney przez periphery,  
zwierzchna zaś rozciągłość sfery ró-  
wna jest produktowi z całego dyamentru  
i z tej samey periphery.

## LXX.

Mając wymiar zwierzchney roz-  
ciągłości sfery, bardzo łączy jest mie-  
rzyć oney pełność. Sfera bowiem mo-  
że być wzięta za zbior niezliczonych  
pira-

piramid, których wierzchołki schodzą  
się do centrum, a bazy składają zwierz-  
chną rozciągłość. Lecz każda z tych  
piramid ma za miarę produkt, który  
wynika, gdy się trzecia część wy foko-  
ści w tym razie promieniowi równej Pełność  
sfery, jest  
to produkt  
moltiplikuje przez bazę; więc summa z trzecioy  
wszystkich tych piramid, to jest pełność części pro-  
mienia, mul-  
typlikowa-  
ney przez sfery zawiera się w produkcie z trze-  
ciey części promienia, moltiplikowa-  
ney przez zwierzchną oney rozciągłość, kiego cyr-  
kulu cztery  
albo przez areę wielkiego cyrkulu czte-  
ry razy wziętą. tego.

## LXXI.

Ponieważ produkt z trzecioy części  
promienia moltiplikowaney przez wiel-  
ki cyrkul cztery razy wzięty, jest toż  
samo, co produkt z trzecioy części pro-  
mienia cztery razy wziętey, albo ze  
dwa trzecich części dyamentru, muly-  
plikowanych przez wielki cyrkul: nad TAB. XIV.  
to, ponieważ pełność cylindra EFGI. Fig. 4.  
KDH ma za miarę produkt z całego  
dyamentru AB moltiplikowanego przez  
wielki cyrkul sfery, który temuż cy-  
lindrowi służy za bazę: idzie zatem, że Pełność  
sfery jest  
równa dwóm  
trzecim czę-  
ściom

Cc

peł.

ści pełności cylindra ko-  
ło niey opi-  
sanego. pełność sfery równa jest dwóm trzecim-  
częściom pełności cylindra koło niey  
opisanego.

## LXXII.

XAB: XIV. Gdyby pełność segmentu sfery A-  
Fig: 3. MLNO dana była do wymiaru: wido-  
Wymiar  
pełności se-  
gmentu sfe-  
ry. mo jest, iż trzeba by naprzód wymierzyć  
część sfery CMANLO, uformowaną  
przez obrót sektora CAM, koło AC  
jednego z swych promieni, co by się wy-  
konało moltiplikując trzecią część pro-  
mienia przez zwierzchną rozciągłość  
rzeczonego segmentu AMLNO; do-  
pieroż odiawszy od produktu z tąd wy-  
nikającego pełność konusa uformowa-  
nego przez obrót tryangułu CPM, to  
jest konusa mającego za bazę cyrkul  
MLNO, a za wysokość część promie-  
nia CP, mielibyśmy w pozostałej resz-  
cie walor szukany segmentu.

## LXXIII.

Zakończmy te Geometryczne po-  
czątki niektórymi propozycjami wzglę-  
dem pełności, i zwierzchney rozciągło-  
ści

ści solidów sobie podobnych. Te pro-  
pozycye same prawie narażają się na  
myśl, skoro na uwagę to bierzemy, na  
czym zależy dwu solidów podobień-  
stwo. Nawet przez analogią niechyb-  
nie wnosić ie można z tego, co się mó-  
wiło (I. Części Artyk: XXXIV, &c.)  
o podobieństwie figur płaskich.

W Artykule XXXII determinowa-  
liśmy, na czym zależy podobieństwo  
dwu piramid: dana tam definicya pira-  
mid sobie podobnych może się rozcią-  
gnąć do wszystkich solidów płaskimi  
ścianami zewsząd określonych: to jest, Na czym  
zależy po-  
dobieństwo  
dwu solidów  
płasko-ścien-  
nych? że dwa takie solida będą sobie podobne,  
ieśli wszystkie anguły między bokami  
pierwszego zawarte będą równe angu-  
łom między bokami drugiego zawar-  
tym, a boki jednego będą proporcjonal-  
ne bokom drugiego.

## LXXIV.

Co się tycze solidów, które nie są  
zewsząd płaszczyznami określone, iakie  
są naprzykład cylindry i konusy: iacno  
Cc 2 jest



jest determinować kondycye do podobieństwa onych potrzebne.

Kondycye determinujące podobieństwo dwu cylindrów prostych. Dwa cylindry proste będą sobie podobne, jeśli onych wysokości będą w proporcji promieni, któremi napisane mają bazy.

## LXXV.

Kondycye determinujące podobieństwo dwu cylindrów ukośnych. W cylindrach zaś ukośnych ieszcz tego będzie potrzeba, ażeby linie, które łączą centra dwu cyrkulów tak w jednym iako i w drugim cylindrze, czyliły też same anguły z onych bazami.

## LXXVI.

Kondycye determinujące podobieństwo dwu konusów. Też same definicje mogą służyć konusom, gdy zamiast linii przechodzącej przez centra dwu cyrkulów, które cylinder ma za bazy, położy się linia prowadzona z wierzchołka konusa do centrum cyrkulu za bazę mu służącego.

## LXXVII.

Kondycye determinujące podobieństwo dwu Żeby dwa konusy ucięte były sobie podobne, trzeba naprzód żeby owe też konusy, których te są ucinkami, ieden

den drugiemu były podobne; powtóre żeby wysokości uciętych konusów były w proporcji promieni, któremi napisane są onych bazy.

## LXXVIII.

Względem sfer, albo solidów doskonałych okrągłych, wiadomo jest, iż te wszystkie są iedne drugim podobne, tak iako wszystkie figury, czy to pełne, czy to płaskie, których determinacja od iedney tylko zawisła linii: iakie są cyrkul, kwadrat, tryangul równo-ścienny, kubus, cylinder koło sfery napisany, i inne.

## LXXIX.

Na resztę ogulnie to się mówić może o solidach podobnych, co się mówiło o figurach płaskich, że się nie różnią iak tylko skalami, które do konstrukcy onych użyte były.

Samo to figur podobnych opisanie wzięte na pilną uwagę stawia przed oczy dwie fundamentalne propozycje względem zwierzchney rozciągłości i pełności solidów podobnych.

## LXXX.

Zwierzchnie  
rozciągłości  
solidów po-  
dobnych są  
w proporcji  
kwadratów  
bokami o-  
nych korre-  
spondujące-  
mi napisa-  
nych.

TAB: XIV.  
Fig: 5, i 6.

Pierwsza z tych propozycji poka-  
zuje nam, że zwierzchnie rozciągłości  
dwu solidów podobnych są w propor-  
cji kwadratów napisanych korrespon-  
dującemi onych bokami. Taż sama  
naprzykład zachodzi relacya między  
zwierzchnemi rozciągłościami dwu po-  
dobnych piramid,  $z$ ,  $Z$ , która jest mię-  
dzy kwadratami  $abcd$ ,  $ABCD$  bo-  
ków korrespondujących w tych dwu  
piramidach.

Dla objaśnienia i wywodu tej pro-  
pozycji nie trzeba więcej nad to, co się  
wyżej mówiło (I. Części Artyk: XLIII,  
i XLIV.) to jest należy tylko uważać,  
iż jeśli  $P$ , i  $p$ , są skale dwu podobnych  
piramid  $Z$ , i  $z$ , tedy liczba części  $P$  za-  
warta w liniach, które mają być użyte  
do wymiaru zwierzchney rozciągłości  
 $Z$ , i kwadratu  $ABCD$ , równa będzie  
liczbie części  $p$  znajdujący się w tych  
liniach, które powinny być użyte do  
wymiaru zwierzchney rozciągłości  $z$ , i  
kwadratu  $abcd$ .

Zatym bowiem idzie, że produkt  
z linii

z linii wchodzących do wymiaru rozcią-  
głości  $Z$ , i kwadratu  $ABCD$ , da liczbę  
kwadratów  $X$  mających za boki części  
 $P$ , równą liczbie kwadratów  $x$  napisa-  
nych bokami  $p$ , którą da produkt z linii  
użytych do wymiaru rozciągłości  $z$ , i  
kwadratu  $abcd$ . To jest, liczby wyra-  
żające relacyą zwierzchney rozciągło-  
ści  $Z$ , do kwadratu  $ABCD$ , będą ró-  
wne liczbowi wyrażającemu relacyą  
zwierzchney rozciągłości  $z$ , do kwadra-  
tu  $abcd$ .

Toż samo wywodzić, i mówić mo-  
żna, komparując z sobą inne też solida  
podobne, iuż to płasko-ścienne, iuż to  
okrągło-wypukłe. Linie bowiem uży-  
te do wymiaru zwierzchney rozciągło-  
ści wszystkich tych solidów będą miały  
też samą liczbę części z własney każde-  
go skali wziętych: zatym w produktach  
z tychże linii zawierać się będą równe  
liczby kwadratów z tych samych czę-  
ści.

Jeśli by linie wchodzące do wymia-  
ru zwierzchney rozciągłości solidów  
podobnych nie mogły mieć spólney  
miary, wiadomo jest, iż demonstracya w  
tym



tym nawet razie byłaby niewzruszona, byleby się wspierała na tych samych principach, których użyliśmy ( II. Części Artyk: XXVIII. ) do komparowania z sobą figur podobnych, których boki spolney miary mieć nie mogą.

## LXXXI.

Zwierzchnie  
rozciągłości  
sfer są w  
proporcji z  
kwadratami  
swych pro-  
mieni.

Podobnym sposobem możnaby dowieść, że zwierzchnie rozciągłości sfer są w proporcji z kwadratami swych promieni. Lecz żeby się to bardziej obiaśniło innym jeszcze sposobem, dosyć będzie przypomnieć, że cyrkule są w proporcji z kwadratami swych promieni, ( III. Części Artyk: VI. ), zwierzchna zaś rozciągłość każdej sfery równa jest wielkiemu oney cyrkulowi cztery razy wziętemu, ( Artyk: LXIX. ).

## LXXXII.

Proporcyonalność zachodząca między zwierzchnemi rozciągłościami solidów podobnych, i kwadratami, które mogą być napisane korrespondującemi onych bokami, tak jest powszechna, że równie służy tym solidom, których wy-  
miar

miar niewiadomy jest, iako tym, których wymiar jest wiadomy.

Tak na przykład niewiedząc nawet, iak się ma wymierzać zwierzchna rozciągłość cylindra ukośnego, można mówić, że zwierzchnie rozciągłości dwu cylindrów ukośnych sobie podobnych są w proporcji z kwadratami dyamentrów, albo promieni, któremi bazy onych napisane są. Gdy się bowiem w te dwa cylindry wpiszą dwa pryzmata podobne, mające tyle ścian, ile się podobą, zwierzchnie rozciągłości tych pryzmatów będą w proporcji z kwadratami rzeczonych dyamentrów: iako wiadomo jest z tego, co się wyżej mówiło. Więc same też cylindry wzięte za ostatnie ze wszystkich tych pryzmatów, które się w nie wpisać iedne po drugich mogą, będą miały zwierzchnie rozciągłości w rzeczoney relacji.

## LXXXIII.

Druga ze dwu propozycji fundamentalnych, służąca do komparowania pełności solidów sobie podobnych, jest ta:

Dd      Soli-

Solida podobne są w proporcji z kubusami swych boków korrespondujących. Tę propozycją można tak demonstrować iak przelżł z tey samey uwagi, że figury podobne nieróżnią się ieno przez skale do konstrukcyi onych użyte.

Zebyśmy to iak nayprościej i nayłacniej pokazali, obierzmy naprzykład TAB: XIV. dwa podobne sobie pryzmata  $Z, z$ , i FIG: 7, i 8. dwa kubusy  $X, x$ , których boki są równe liniom  $AB, ab$  korrespondującym sobie w tych dwu pryzmatach; nad to weźmimy dwie skale  $AB, ab$  podzielone na liczbę części bardzo wielką, a tym samym do wymiaru solidów dostateczną. To założywszy każdy łącno widzieć może, iż liczba kubusów uformowanych z  $ab$ , znaydująca się w pryzma  $z$ , i kubusie  $x$ , równa będzie liczbie kubusów uformowanych z  $AB$ , w pryzma  $Z$ , i kubusie  $X$ , zawartey.

Podobnie można też mówić o wszystkich innych solidach, tak dalece, że te nawet, którychby dymensye nie miały spolney miary, byłyby w proporcji z kubusami swych boków korrespondujących. LXXXIV.

## LXXXIV.

Tak naprzykład pełności sfer Sfer są oczewiście są w proporcji z kubusami swych promieni.

Sfery są w proporcji z kubusami swych promieni.

K O N I E C.







# REGISTR MATERYI.

*Liczba Rzymska znaczy Artykuły, pospolita karty.*

---

## PIERWSZA CZĘŚĆ

O sposobach, przez które naynaturalniey ludzie przyszli do wymiarów ziemnych.

- II. *Linia prosta jest naykrótsza ze wszystkich, które mogą być prowadzone od iednego punktu do drugiego, a za tym jest miarą odległości onych od siebie.* 2.
- III. *Linia na drugiej stojąca, a ku żadney stronie nieśkłoniona, jest do niej perpendykularna.* 3.
- IV. *Rektangul jest to figura mająca cztery ściany wzajemnie do siebie perpendykularne.* 4.

Kwa.

- Kwadrat jest to Rektangul, którego cztery ściany są równe. tamże.
- V. Sposób podniesienia linii perpendykularney. 5.
- VI. Cyrkuł jest to obwód ciała, który bywa napisany końcem iedney nogi cyrkla obracanej koło drugiey w jakim punkcie utkwioney. 7.
- Centrum jest ów punkt, w którym koniec iedney nogi cyrkla bywa utkwiony, gdy druga pisze cyrkuł. tamże.
- Promień jest otwór cyrkla, którym się pisze cyrkuł. tamże.
- Diameter jest podwójny promień. tamże.
- VII. Sposób spuszczenia linii perpendykularney. 8.
- VIII. Rozdzielić linią na dwie części równe. tamże.
- IX. Napisać kwadrat mając bok onego daney. 9.
- X. Napisać rektangul, którego długość i szerokość są dane. 10.
- XI. Parallele są to linie wszędy równie oddlegte od siebie. tamże.
- Prowadzić parallelę do iakiey linii przez punkt dany. 11.
- XII.

- XII. Miara rektangulu jest produkt z wysokości iego moltiplikowaney przez bazę. 13.
- XIII. Figury prostokątne są te, które się prostemi liniami zamykają. 14.
- Tryangul jest to figura trzema liniami prostemi zamknięta. 15.
- XIV. Linia diagonalna rektangulu jest ta, która go dzieli na dwa tryanguly równe. tamże.
- Tryanguly rektanguly są te, które mają dwa boki do siebie wzajem perpendykularne. 16.
- Tryangul jest półową rektangulu mającego też same bazę i wysokość, które ma tryangul. tamże.
- Zatym miara tryangulu jest półowa produktu z iego wysokości moltiplikowaney przez bazę. 17.
- XV. Tryanguly mające też samą wysokość i bazę, mają równe rozciągłości. tamże.
- XVII. Tryanguly mające też samą bazę, i między temi samemi parallelami zamknięte, mają równe rozciągłości. 19.
- XVIII. Parallelogrammy są to figury zamknięte czterema ścianami, z których każda do leżącej naprzeciw siebie jest parallelą. 20.



- Parallelogrammy są równe produktowi z wysokości onych moltiplikowanej przez bazę. tamże.
- XIX. Parallelogrammy, które mają spólną bazę, a znajdują się między temi samymi parallelami, są równe sobie co do rozciągłości. 21.
- XX. Poligony regularne są to figury zamknięte ścianami równymi, i równe do siebie skłonionemi. 22.
- XXI. Sposób napisania poligonu mającego pewną liczbę boków. tamże.
- Pentagon ma 5 boków, Hexagon 6, Heptagon 7, Oktogon 8, Enneagon 9, Dekagon 10, &c. tamże.
- XXII. Wymiar rozciągłości poligonu regularnego. 23.
- Perpendykuł poligonu jest to linia perpendykularna z centrum figury do iednego z boków oney prowadzona. tamże.
- XXIII. Tryangul równo - ścienny jest ten, który ma wszystkie trzy boki równe. 24.
- Sposób napisania tryangulu równo - ściennego. tamże.
- XXVI. Mając wiadome trzy ściany iakiego tryangulu, uczynić inny tryangul iemu równy. 27.

- XXVII. Angul jest skłonienie się iedney linii do drugiej. 29.
- XXVIII. Uczynić angul równy drugiemu. tamże.
- Tryangul, w którym dwie ściany i angul między nimi zawarty są wiadome, jest determinowany. 30.
- XXIX. Drugi sposób napisania angula równego drugiemu. 31.
- Chorda albo cięciwa jest linia prosta mająca spólne końce z końcami albo ostatniemi punktami łuku. tamże.
- XXX. Dwa anguly, i iedna ściana determinują tryangul. 32.
- XXXI. Tryangul Izoscel jest ten, który ma dwie równe ściany. tamże.
- Anguly w tryangule równo - ściennym, od dwu boków równych i bazy zawarte, są sobie równe. 34.
- XXXIV. Na czym zawisło podobieństwo figur? 37.
- XXXVI. Sposób którym się ma rysować iaka figura podobna drugiej. 38.
- XXXVIII. Jeśli dwa anguly iakiego tryangulu równe są drugim dwóm angulom innego tryangulu, trzeci też angul w
- Ee pier-

- pierwszym równy jest trzeciemu w drugim tryangule. 41.
- XXXIX. We dwu tryangulach mających też same kąty, boki są proporcjonalne. 42.
- XL. Podzielić linią prostą na tyle równych części, ile się podoba. 46.
- XLI. Co to jest linia czwarta proporcjonalna, i iak się znajduje? 47.
- XLII. Wysokości tryangulów podobnych są proporcjonalne onych bokom. 48.
- XLIV. Płaszczyzny tryangulów podobnych mają się do siebie, iako kwadraty boków korespondujących. 49.
- XLV. Własności figur podobnych wynikające z własności tryangulów podobnych. 51.
- XLVII. Płaszczyzny figur podobnych tak się mają do siebie, iak się mają do siebie kwadraty boków korespondujących. 54.
- XLVIII. Figury podobne niczym od siebie nie różnią się iak tylko różnością skal, wedle których są napisane. tamże.
- L. Sposób mierzenia odległości iakiego miejsca nieprzystępnego. 56.
- LII. Kątu miarą jest łuk cyrkulu między bokami jego zawarty. 58.

LIII.

- LIII. Cyrkul dzieli się na 360 gradusów, a każdy gradus na 60 minut &c. tamże.
- LIV. Kąt prosty ma 90 gradusów, a boki do siebie wzajem perpendykularne. 59.
- LV. Kąt ostry jest mniejszy niż prosty. tamże.
- LVI. Kąt tępy większy jest niż prosty. tamże.
- LVII. Summa wszystkich kątów mających spólny wierzchołek, które się zmieścić mogą z iedney strony linii prostej, czyni 180 gradusów. 60.
- LVIII. Summa wszystkich kątów, które się uformować mogą koło iakiego punktu, równa jest czterem kątom prostym. tamże.
- LIX. Opisanie Instrumentu, który się nazywa pół-cyrkulem mierniczym albo Grafometrem. 61.
- Iak ma być Grafometr do mierzenia kątów użyty? tamże.
- LX. Co to jest Transportator, i iak ma być użyty do napisania kątu mającego pewną liczbę gradusów? 62.
- LXIII. Kąty ukośne są te, które się formują z obu stron linii przecinającej dwie parallele. 66.

Ee 2

Te



Te anguły są sobie równe. tamże.

LXIV. Summa trzech angułów w każdym tryangule równa jest dwóm angułom prostym. 67.

LXVIII. W każdym tryangule anguł zewnętrzny równy jest dwóm angułom wewnętrznym naprzeciw niemu leżącym. 69.

LXIX. W tryangule Izoscelu gdy jeden anguł jest wiadomy, tym samym inne dwa wiadome są. 70.

LXX. W tryangule równościennym każdy ze trzech angułów czyni 60 gradusów. tamże.

LXXI. Sposób napisania Hexagonu. tamże.

LXXII. Połowa angułu w centrum Hexagonu daje anguł cały Dodekagonu. 72.

LXXIII. Rozdzielić łęk albo anguł na dwie. tamże.

LXXIV. Sposób napisania poligonów od 24 &c. boków. 73.

LXXV. Sposób napisania Oktogonu. tamże.

Sposób napisania poligonów od 16, 32, &c boków. 74.

DRU.

## DRUGA CZĘŚĆ.

O sposobie Geometrycznym komparowania Figur prosto-ściennych.

I. **D**wa rektanguły mające też samą wysokość są do siebie iako onych bazy. 78.

V. Sposób zamienienia iednego tryangulu na drugi, któryby miał wysokość daną. 79.

VI. Drugi sposób zamienienia iednego rektangulu na drugi, któryby miał wysokość daną. 81.

VII. Dowód gruntowny tej propozycji: we dwu rektangulach równych baza pierwszego ma się do bazy drugiego, iako wysokość pierwszego do wysokości drugiego. 83.

VIII. Gdy ze czterech linii tak się ma pierwsza do drugiej, iako trzecia do czwartej: Rektangul uformowany z pierwszej i czwartej równy będzie rektangulowi z wtórej i trzeciej. tamże.

IX. Liczby lub wielkości takie, z których pierwsza tak się ma do wtórej, iako trzecia do czwartej, zowią się proporcjonalne &c. 84.

X. Ze

- X. Ze czterech terminów proporcji pierwszy i czwarty zowią się kraynemi lub końcowemi, wtóry i trzeci średniemi. tamże.
- XI. W proporcji produkt z terminów kraynych równy jest produktowi z terminów średnich. 85.
- XII. Jeśli produkt z terminów kraynych jest równy produktowi z terminów średnich, cztery terminy są proporcjonalne. tamże.
- XIII. Zkąd się wywodzi reguła trzech albo reguła złota? tamże.  
Sposób znalezienia czwartego terminu proporcji, której trzy pierwsze są wiadome. 87.
- XVI. Podwoić kwadrat, albo dwa kwadraty równe zmieścić w iednym. 90.
- XVII. Zmieścić w iednym kwadracie dwa kwadraty nie równe. 91.
- XVIII. Hipotenuza jest to bok największy tryangułu rektangułu. 94.  
Kwadrat oney jest równy summie kwadratów ze dwu innych boków. tamże.
- XIX. Dwa iakiekolwiek kwadraty zmieścić w iednym. tamże.
- XX. Jeśli trzy boki tryangułu rektangułu będą bazami trzech figur podobnych: ta, któ-

- którey hipotenuza służyć będzie za bazę, zrówna się summie dwu innych figur. 95.
- XXI. Zmieścić wiele figur podobnych w iedney onym podobney. 96.
- XXIII. Produkt z iakieykolwiek liczby multiplikowanej przez się samę jest kwadratem teyże liczby. 98.  
Wielkość, albo liczba radykalna kwadratu jest ta, która multiplikowana przez się samę daie tenże kwadrat. 99.
- XXIV. Liczba iedna wielokrotna względem drugiey jest ta, która kilka razy zawiera drugą doskonale, to jest bez żadnego fraktu. tamże.  
Bok, i diagonalna kwadratu nie mogą mieć spólney sobie miary. 100.
- XXV. Inne linie, które spólną sobie miarą nie mogą być mierzone. tamże.
- XXVII. W tryangulach, i innych figurach sobie podobnych, boki są proporcjonalne w tym nawet razie, gdy te boki mierzone być nie mogą spólną sobie miarą. 105.
- XXVIII. Tryanguły, i inne figury podobne są zawsze w proporcji kwadratów napisanych korrespondującemi onych bokami. tamże.
- TRZE-



## TRZECIA CZĘŚĆ

O wymierze i własnościach figur cyrkularnych.

- I. **M**iarą cyrkulu jest produkt z periferii przez półową promienia moltiplikowanej. 112.
- II. Area cyrkulu jest równa tryangulowi mającemu za wysokość promień, a za bazę linię prostą periferii równą. tamże.
- IV. Periferya cyrkulu ma blisko 22 takich części; iakich siedm zawiera cały dyametr. 114.
- V. Periferye cyrkulów są w proporcji swych promieni. 115.
- VI. Płaszczyzny cyrkulów są proporcjonalne kwadratowi promieniami onych napisanym. 116.
- VII. Ze trzech cyrkulów napisanych trzema bokami tryangułu rektangułu, ten, który ma za promień hipotenuzę, równy jest summie dwu innych. 117.
- VIII. Pierścień albo korona jest to plac zawarty między dwoma cyrkulami też samo centrum mającemi. tamże.
- Dla wymiaru pierścienia, trzeba moltiplikować szerokość onego przez periferię średnią. 119.

IX. Se-

- IX. Segment, albo uciniek cyrkulu jest to plac zawarty między łękami, i cięciwą. 120.
- Wymiar figur cyrkularnych redukuje się do wymiaru segmentu. tamże.
- X. Sektor jest to część cyrkulu między dwoma promieniami, i łukiem zawarta. 121.
- Sektora i segmentu miara. tamże.
- XI. Znałść centrum iakiegokolwiek łuku cyrkularnego. tamże.
- XIII. Dwie linie proste z iakiegokolwiek punktu periferii prowadzone do końców dyametru, zawierają angul prosty. 124.
- XV. Wszystkie Anguły mające wierzchołki u periferii, a boki oparte na iednym spólnym łuku, są równe, i mają za spólną miarę; tegoż samego łuku, na którym oparte są, półową. 127.
- XVIII. Tangens jest to linia prosta dotykająca cyrkulu na iednym tylko punkcie. 131.
- Angul segmentu jest ten, który się między cięciwą, i linią (tangens) zawiera. 132.
- Miara iego jest półowa łuku należącego do segmentu. tamże.
- XIX. Linia tangens jest perpendykularna do dyametru przechodzącego przez punkt,

Ff

- punkt, na którym tangens dotyka się cyrkulu. 133.
- XXI. Co to jest napisać taki segment, w którymby się zawrzeć mógł anгуł dany? 134.  
Sposób napisania segmentu, w którym ma się zawrzeć anгуł dany. tamże.
- XXII. Znaleść odległość iakiego miejsca od trzech innych, których pozycye są wiadome. 136.
- XXIII. Gdy się dwie cięciwy rozcinają w cyrkule, rektanguł z części cięciwy jednej równy jest rektangułowi z części cięciwy drugiej. 139.
- XXIV. Kwadrat z iakieykolwiek perpendykularney podniesionej z dyamentru do perferyi, jest równy rektangułowi ze dwu części, na które się dzieli dyamentr. 140.
- XXV. Zamienić rektanguł na kwadrat. tamże.
- XXVI. Co to jest linia średnia proporcjonalna między dwóma liniami? 141.  
Sposób znalezienia linii średniej proporcjonalnej między dwóma liniami danemi. tamże.
- XXVII. Inny sposób znalezienia linii średniej proporcjonalnej. 142.
- XXVIII. Zamienić figurę prosto-ścienneą na kwadrat. 143.

- XXX. Napisać kwadrat, któryby miał relacyą daną do kwadratu danego. 144.
- XXXI. Napisać poligon, któryby do innego poligonu sobie podobnego miał relacyą daną. 145.
- XXXII. Napisać cyrkul, któryby do innego cyrkulu danego miał relacyą daną. 146.
- XXXIII. Jeśli z punktu wziętego za obrytem cyrkulu, będą prowadzone dwie linie przez siebie przechodzące, rektanguly z onych przez swe części za cyrkulem leżące moltiplikowanych są równe. tamże.
- XXXIV. Kwadrat z linii (tangens.) jest równy rektangułowi z linii (secans) przez swą część za obrybem cyrkulu leżącą moltiplikowany. 148.
- XXXV. Z danego punktu za obrybem cyrkulu poprowadzić do tegoż cyrkulu linią (tangens). 149.

## CZWARTA CZĘŚĆ

O sposobie mierzenia figur pełnych, albo tych wielkości, które się zowią Solida: także o wymierze zwierchnych rozciągłości, któremi solida zewsząd określone są.



- I. **K**ubus jest to bryła sześcią - równemi kwadratami zeoszczęd określona: d wszystkim solidom za spólną miarę służąca. 153.
- II. Parallelopiped jest bryła sześcią - rektangulami określona. 154.
- Płaszczyzny zowią się *parallele*, które w całym swym rozciągu równie iedne od drugich są odległe. tamże.
- III. Wymiar parallelopipedu. 155.
- IV. Parallelopiped formuje się przez kwadrat lub rektangul tak pomykany, że nowe onego pozycye są zawsze względem pierwszey *parallele*. 157.
- V. Linia perpendykularna do płaszczyzny jest ta, która się w żadną stronę ku niej nie skłania. tamże.
- Toż mówić o płaszczyznach wzajem do siebie perpendykularnych. tamże.
- VI. Linia perpendykularna do płaszczyzny jest perpendykularną do wszystkich linii teyże płaszczyzny prowadzonych z punktu, na którym ona stoi. 158.
- VIII. Sposób prosty, którym linia perpendykularna podniesiona z płaszczyzny, albo też do niej spuszczone być może. 160.

IX. Li-

- IX. Linia będzie perpendykularną do płaszczyzny, jeśli będzie perpendykularną do dwu linii teyże płaszczyzny prowadzonych z punktu, na którym ona stoi. tamże.
- X. Sposób, którym iedna płaszczyzna może być na drugiej perpendykularnie postawiona. 161.
- XI. Prowadzić płaszczyznę *parallelę* do innej. tamże.
- XII. Zmierzyć *angul*, pod którym skłonione są do siebie dwie płaszczyzny. 162.
- XIII. Zmierzyć *angul*, pod którym linia skłania się do płaszczyzny. 163.
- XIV. Drugi sposób spuszczenia linii perpendykularney do płaszczyzny z danego nad nią punktu. 164.
- XV. Drugi sposób podniesienia linii perpendykularney z danego punktu na płaszczyznę. tamże.
- XVI. *Pryzma proste* jest to figura pełna, której dwie bazy *parallele* na przeciw siebie leżące są dwa równe poligony, inne zaś ściany są rektanguły. 165.
- XVII. Sposób, którym się formują *pryzmata proste*. tamże.

XIX. Dwa

- XIX. Dwa pryzmata mające równe bazy, zachowują też samę między sobą relacyą, która zachodzi między onych wysokościami. 166.
- XX. Dwa pryzmata mające równą wysokość, zachowują też samę relacyą, która jest między onych bazami. tamże.
- XXI. Pryzma proste ma za miarę produkt z bazy moltiplikowanej przez wysokość. 168.
- XXII. Pryzmata ukośne tym się różnią od pryzmatów prostych, że tym służą za bazy rektanguly, owym parallelogramy. 169.
- XXIII. Sposób, którym się formują pryzmata ukośne. tamże.
- XXIV. Pryzmata ukośne są równe pryzmatom prostym, gdy onych bazy, i wysokości są równe. 171.
- XXV. Toż mówić o równości parallelepipedów ukośnych z prostymi. tamże.
- XXXII. Na czym zależy podobieństwo dwu piramid? 176.
- XXXVII. Piramidy mające też samę wysokość, i bazę, są równe. 180.
- XXXVIII. Dwie piramidy są także równe, gdy mają też samę wysokość, a bazy co do figu-

- do figury różne i zgoła sobie niepodobne, ale co do rozciągłości równe. tamże.
- XXXIX. Piramidy mające też samę wysokość, zachowują też samę do siebie relacyą, która zachodzi między onych bazami. 181.
- XLII. Wielkość, albo pełność każdej piramidy, jest to produkt z bazy moltiplikowanej przez trzecią część wysokości. 187.
- XLIII. Każda piramida jest trzecią częścią każdego pryzma, które ma też samę bazę, i wysokość co piramida. tamże.
- XLV. Cylinder jest to bryła mająca za dwie bazy dwa równe cyrkuly leżące do siebie parallele, a złączone przez płaszczyznę koła periphery onych obwiedzioną. 189.
- Różnica cylindrów prostych i ukośnych. tamże.
- XLVI. Sposób, którym się formują cylindry. tamże.
- XLVII. Zwierzchna rozciągłość cylindra równa jest rektangulowi mającemu spólną z cylindrem wysokość, a za bazę linią prostą równą periphery jednego ze dwu cyrkulów za bazy temuż cylindrowi służących. 191.
- XLIX. Cy-



- XLIX. *Cylindry mające też samę wysokość, i baze, są równe sobie co do pełności.* 192.
- L. *Miarę cylindra jest produkt z bazy multiplikowanej przez wysokość.* 193.
- LI. *Konus jest to piramida mająca za bazę cyrkuł.* tamże.
- LII. *Różnica konusów prostych i ukośnych.* tamże.
- LIII. *Miarę zwierzchniej rozciągłości konusa prostego jest produkt z półowy boku multiplikowanej przez periferię bazy.* 194.
- LIV. *Zwierzchna rozciągłość konusa prostego jest to sektor cyrkułu.* 195.
- LVI. *Konusy mające też same bazy, i wysokości, są równe.* 196.
- LVII. *Pełnością konusa jest produkt z bazy multiplikowanej przez trzecią część wysokości.* tamże.
- LIX. *Sposób, którym się wymierza zwierzchna rozciągłość konusa uciętego, gdy konus jest prosty.* 198.
- LX. *Co to jest Sfera, albo Kula?* tamże.
- LXV. *Zwierzchna rozciągłość sfery ma za miarę produkt z dyamentru multiplikowanego przez periferię wielkiego swego cyrkułu.* 206.

LXVI. Co

- LXVI. *Co to jest segment sfery, i jak się mierzy zwierzchna onego rozciągłość?* tamże.
- LXVII. *Zwierzchna rozciągłość sfery jest równa zwierzchniej rozciągłości cylindra koło niej opisanego.* 207.
- LXVIII. *Wąsły równo-grube sfery, i cylindra koło niej opisanego mają równe zwierzchnie rozciągłości.* 208.
- LXIX. *Zwierzchna rozciągłość sfery wczworo jest większa za arę wielkiego swego cyrkułu.* tamże.
- LXX. *Pełność sfery jest to produkt z trzeciej części promienia multiplikowanej przez arę wielkiego cyrkułu cztery razy wziętego.* 209.
- LXXI. *Pełność sfery jest równa dwóm trzecim częściom pełności cylindra koło niej opisanego.* tamże.
- LXXII. *Wymiar pełności segmentu sfery.* 210.
- LXXIII. *Na czym zależy podobieństwo dwu solidów płasko-sciennych.* 211.
- LXXIV. *Kondycye determinujące podobieństwo dwu cylindrów prostych.* 212.
- LXXV. *Kondycye determinujące podobieństwo dwu cylindrów ukośnych.* tamże.

Gg

LXXVI.

- LXXVI. Kondycye determinujące podobieństwo dwu konusów. tamże.
- LXXVII. Kondycye determinujące podobieństwo dwu konusów uciętych. tamże.
- LXXVIII. Sfery, kubusy, i inne figury, których determinacya zawisła od iedney linii, są wszystkie zgoła sobie podobne. 213.
- LXXIX. Ogulnie: solida podobne nieróżnią się iak tylko przez skalę do konstrukcyi onych użyte. tamże.
- LXXX. Zwierzchnie rozciągłości solidów podobnych są w proporcyi kwadratów bokami onych korrespondującemi napisanych. 214.
- LXXXI. Zwierzchnie rozciągłości sfer są w proporcyi z kwadratami swych promieni. 216.
- LXXXIII. Solida podobne są w proporcyi z kubusami swych boków korrespondujących. 218.
- LXXXIV. Sfery są w proporcyi z kubusami swych promieni. 219.

Koniec Rejestru Materyi.



## O M Y Ł K I.

\* Pierwsza liczba znaczy kartę, druga wiersz.

4. 23. Na samej linii, łączącego, &c. Czytaj: na samej linii łączącego, &c.
10. 12. *parallels*. Czytaj: *parallels*.  
Na innych też miejscach za miast: *parallels*, *parallels*, *parallelogram* &c, Czytaj: *parallels*, *parallels*, *parallels*, *parallelogram* &c.
17. 25. wysokości równe *EF*, *AD*, równe, Czytaj: wysokości *EF*, *AD*, równe.
22. 3. na brzegu: *poligony regularne*, Czytaj: *poligony regularne*.
22. 16. *peryferya*, Czytaj: *peryferya*.
22. 22. *sześc*, Czytaj: *sześc*.
31. 3. Napisz łęk *abc*, Czytaj: Napisz łęk *abc*.
32. 6. z ostatniech, Czytaj: z ostatniech.
35. 24. Miałbyś tryangul *DAG*, Czytaj: otrzymałbyś podobnym sposobem tryangul *DAG*.
42. 2. z łnią *CB*, Przyday: także podłużoną.
43. 3. *linii* Czytaj: *linii*.
44. 25. przez Prozumie, Czytaj: przez *P* rozumie.
46. 18. *rektangularny* dobrze, podłu żony, Czytaj: *rektangularny* dobrze podłużony.
49. 20. na brzegu: *plaszczy*, Czytaj: *plaszczyny*.
72. 8. *Angul*, Czytaj: *angul*.
90. 8. *polóźmy*, Czytaj: *polóźmy*.
95. 8. *AHIF*, Czytaj: *AHIE*.
99. 20. na brzegu: zawiera dru doskonale, Czytaj: zawiera druga doskonale.
105. 10. na brzegu: *gdy re*, Czytaj: *gdy re*.
111. 12. (Fig. 8.), Czytaj: (Fig. 3.).
112. 14. na brzegu: *teryferyi*, Czytaj: *peryferyi*.
115. 3. na brzegu: *Cyrkukutów*, Czytaj: *cyrkukutów*.
128. 4. u łęku *ACEFG*, Czytaj: u łęku *ACEFB*.
133. 22. na brzegu: Fig. 7. Czytaj: Fig. 8.
134. 8. iako *angulu ADB* &c., Czytaj: iako półowy *angulu ADB*, tak i całego *angulu ABS* &c.
144. 18. *napisal dyametrem DC*, Czytaj: *napisal na dyametrze DC*.

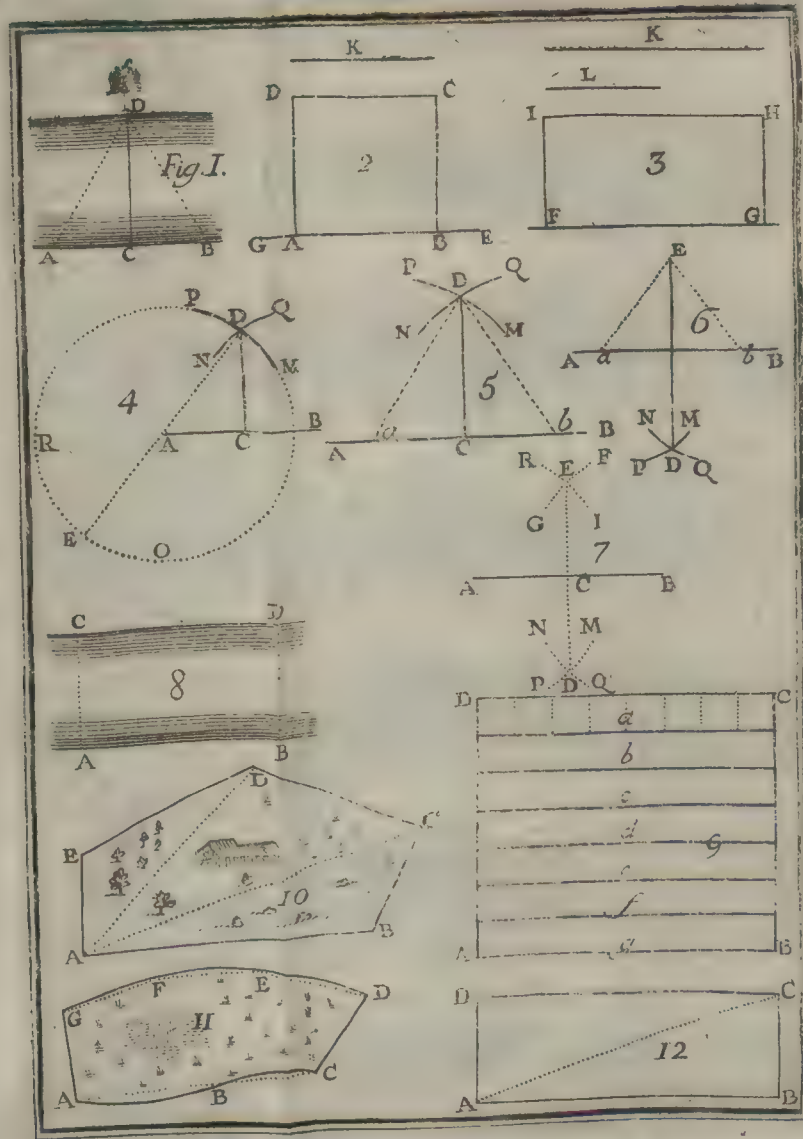


\* 9 5 \* 9 5 \*

146. 26. na brzegu: *owe*, Czytaj: *owe*.  
 148. 8. na brzegu: *ową*, Czytaj: *ową*.  
 148. 13. na brzegu: *multiplikowane*, Czytaj: *multiplikowane*.  
 164. 9. *położywszy*, Czytaj: *położywszy*.  
 171. 4. *dzy*, Czytaj: *gdy*.  
 171. 14. na brzegu: *nkośnych*, Czytaj: *ukośnych*.  
 176. 22. *HIKLMN*, Czytaj: *AIKLMN*.  
 178. 16. *BCDEFG*, Czytaj: *BCDEF*.  
 181. 7. *bcsdf*, Czytaj: *bcd ef*.  
 181. 27. na brzegu: *huzami*, Czytaj: *bazami*.  
 183. 26. *AGTUXT*, Czytaj: *AGTVXT*.  
 189. 20. *LXVI*, Czytaj: *XLVI*.  
 210. 2. na brzegu: *części*, Czytaj: *częściom*.



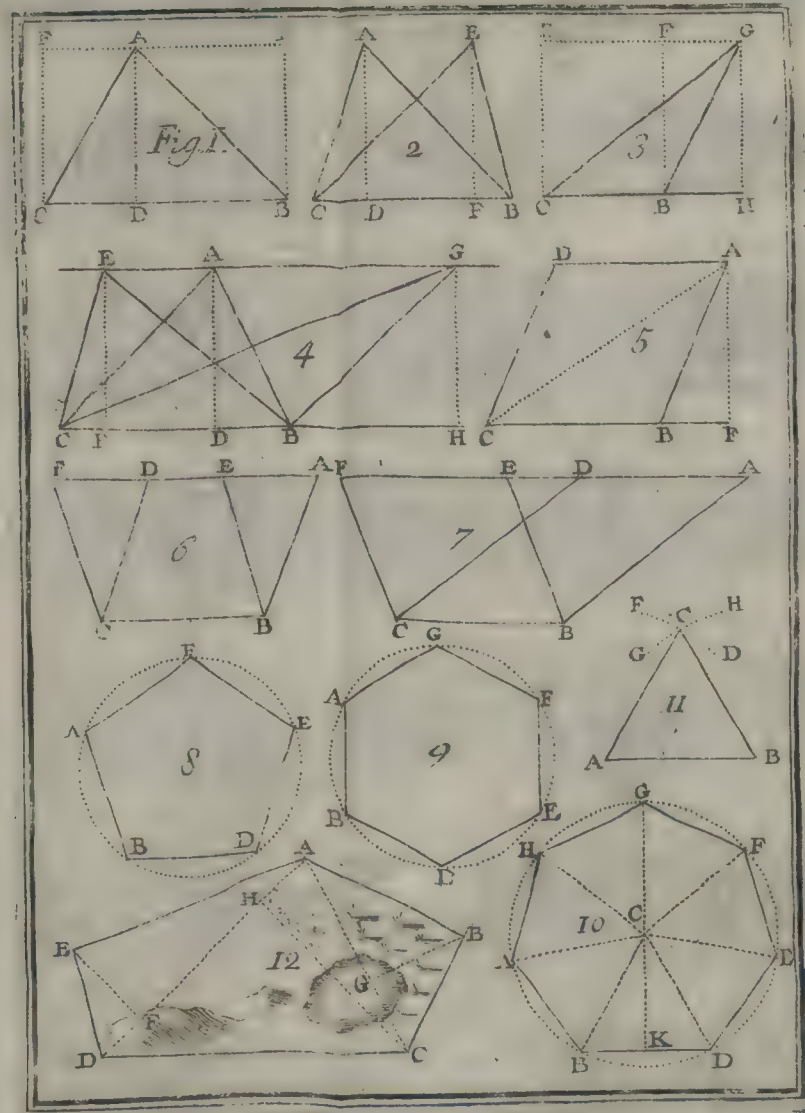
Tab. I.







Tab. II.





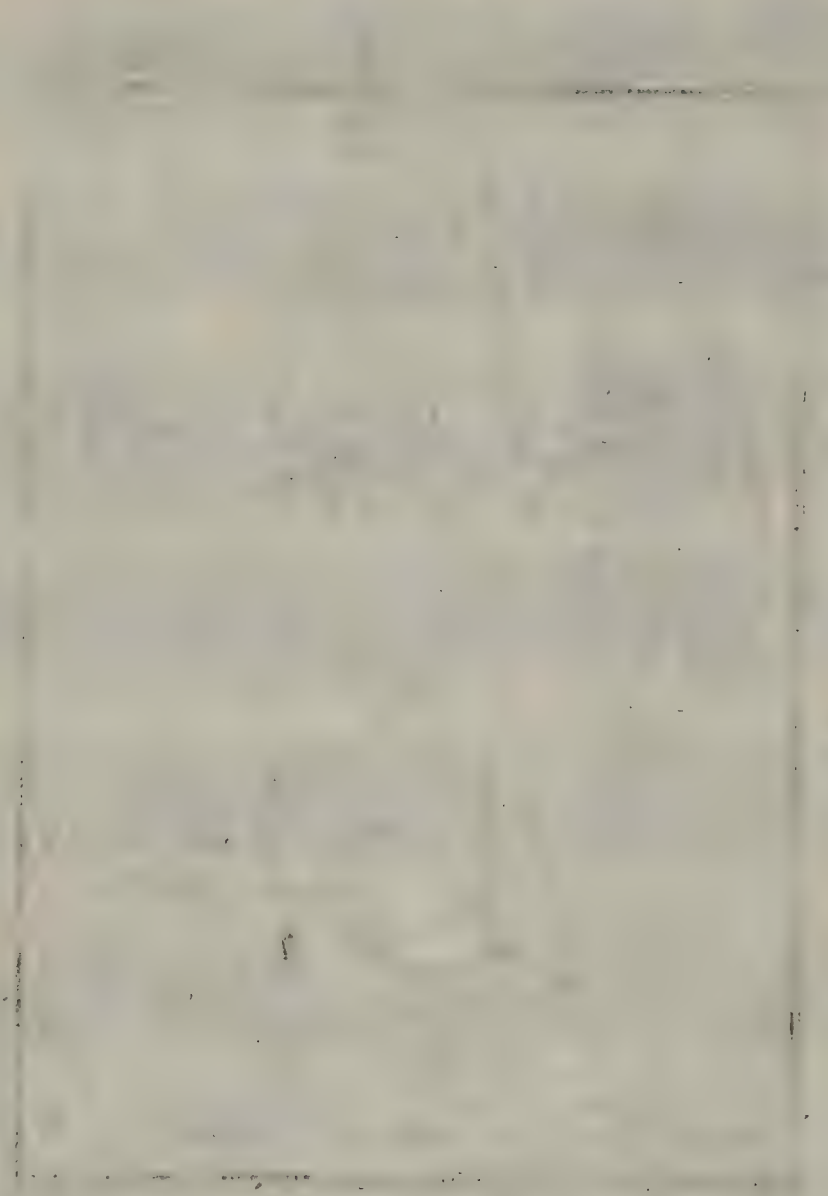
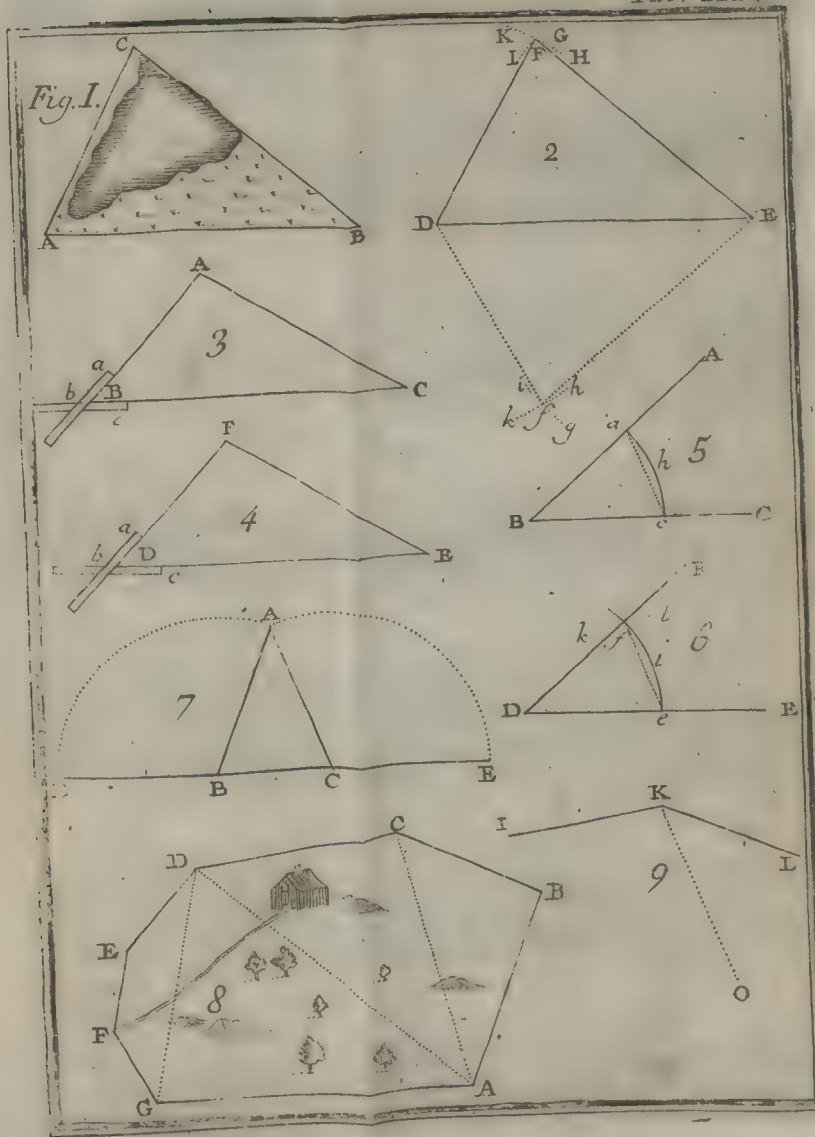
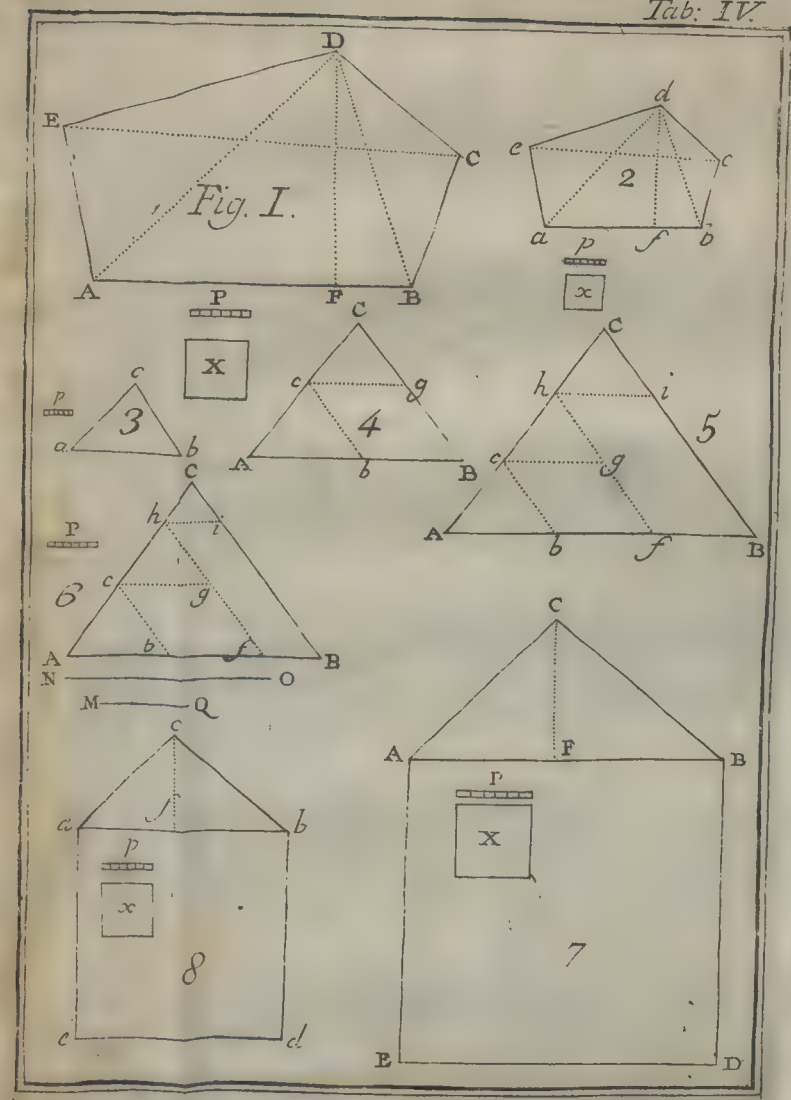


Fig. I.

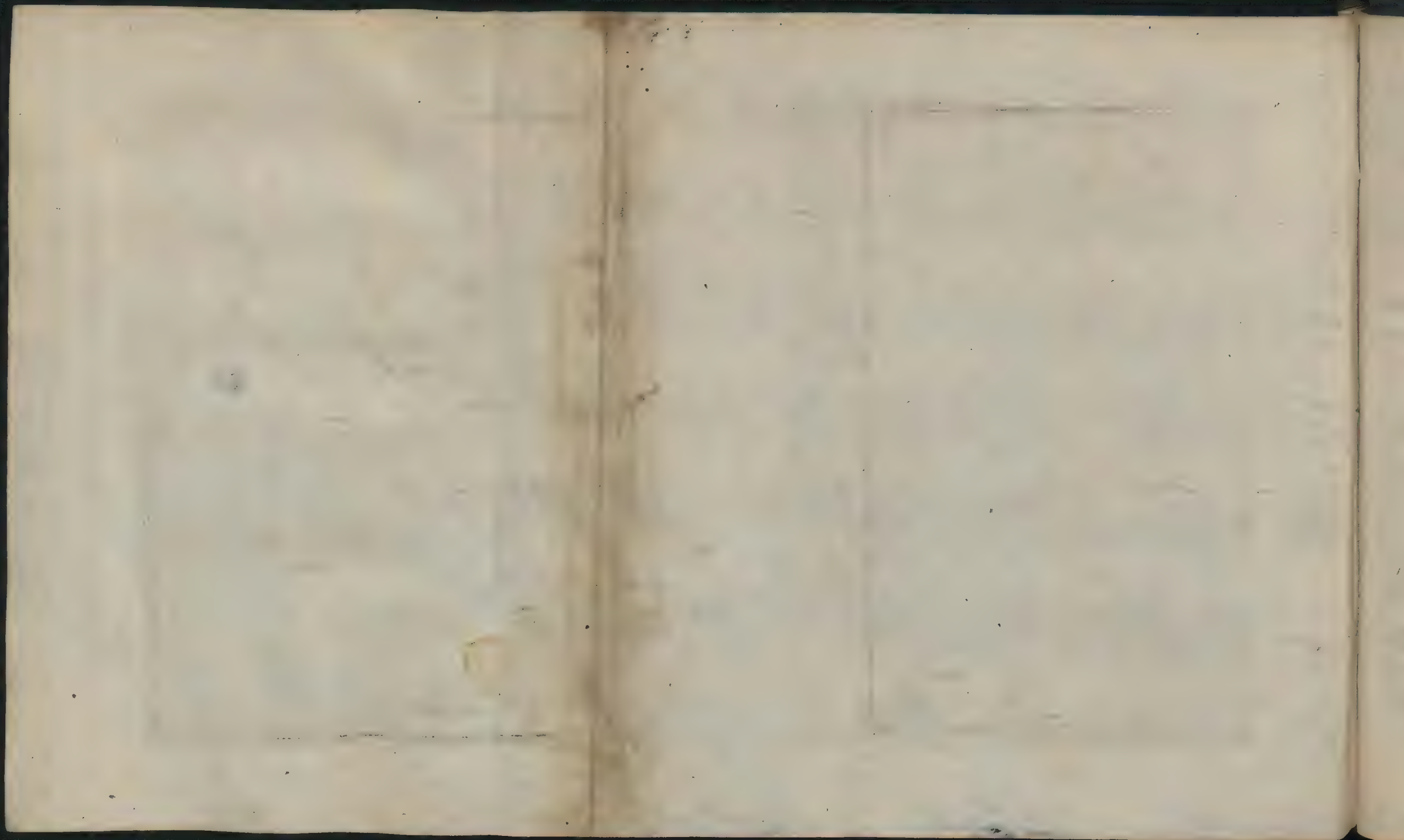


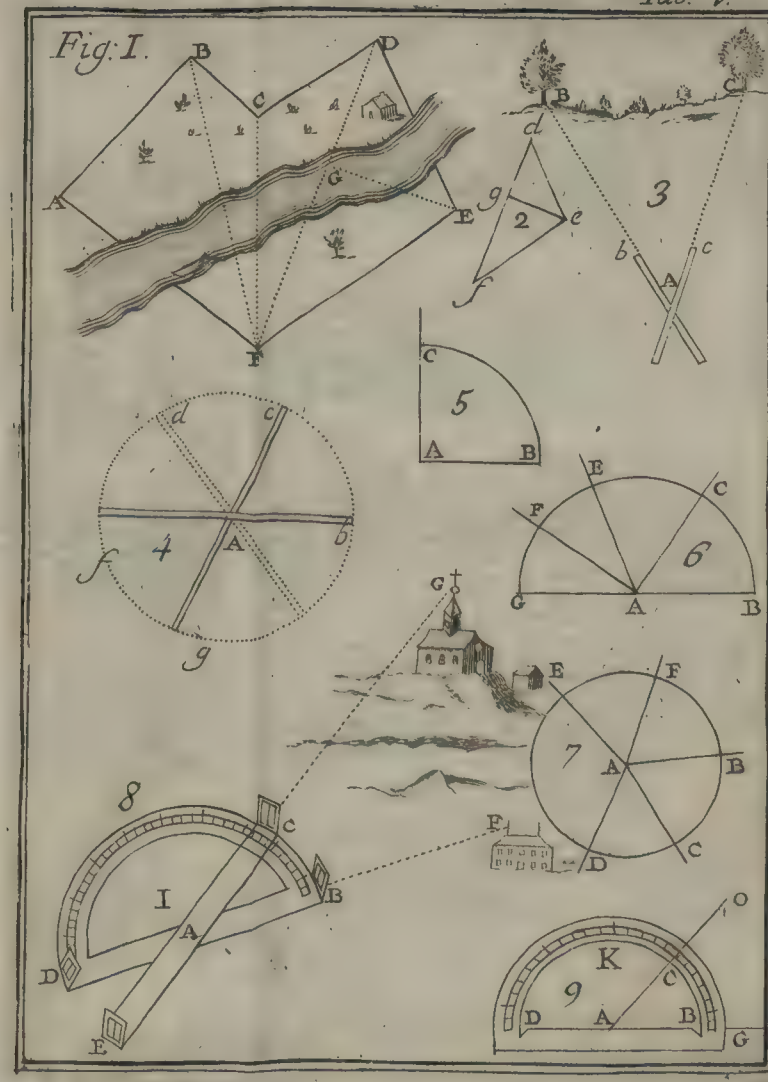














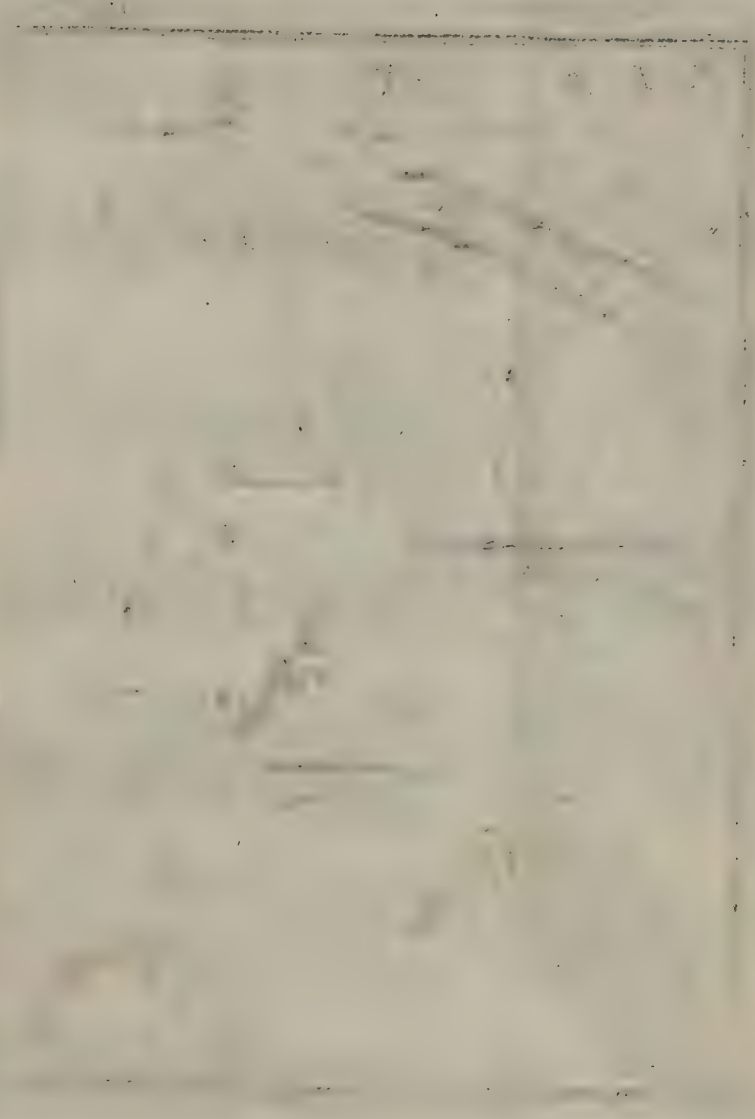
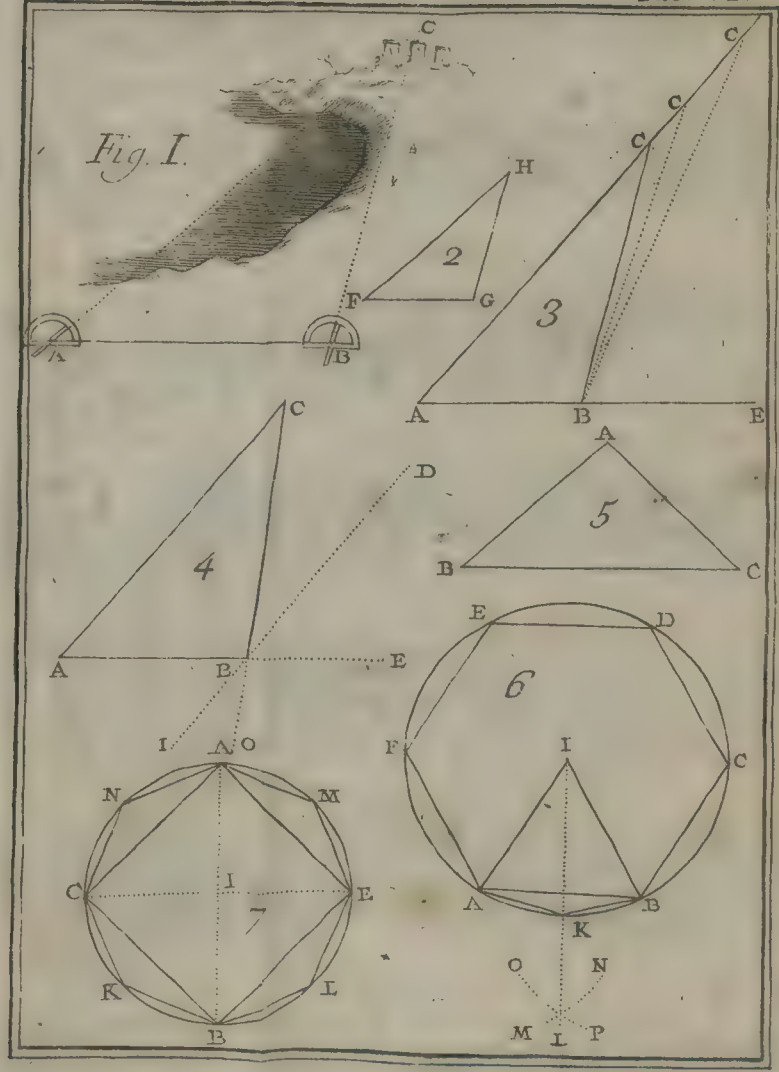


Fig. I.





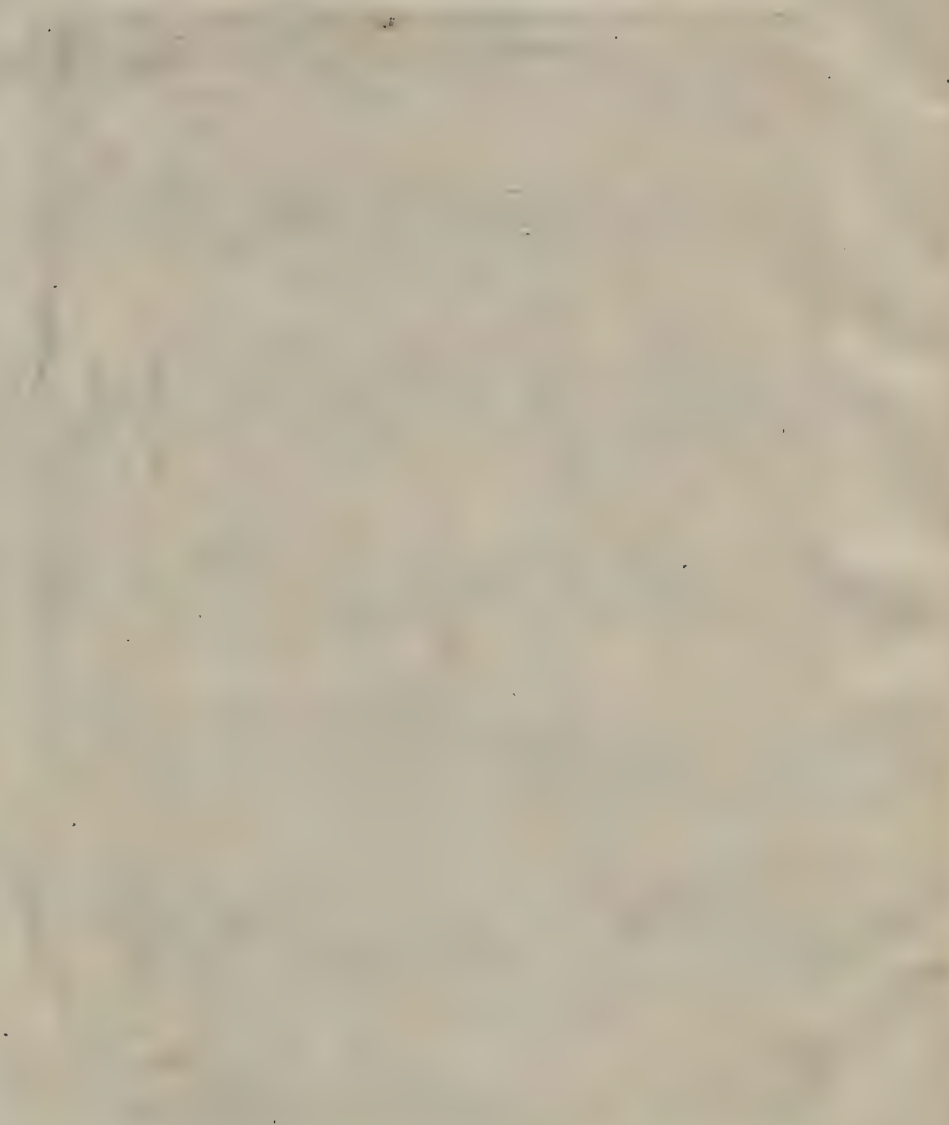
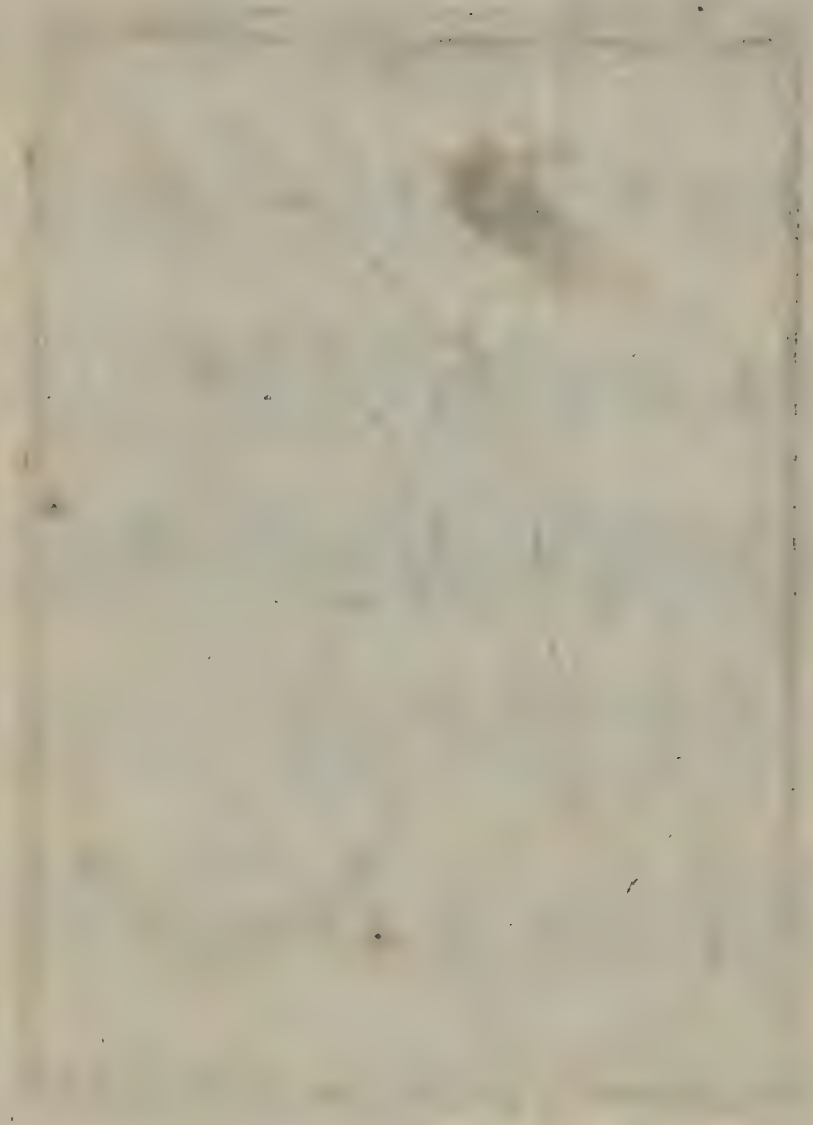
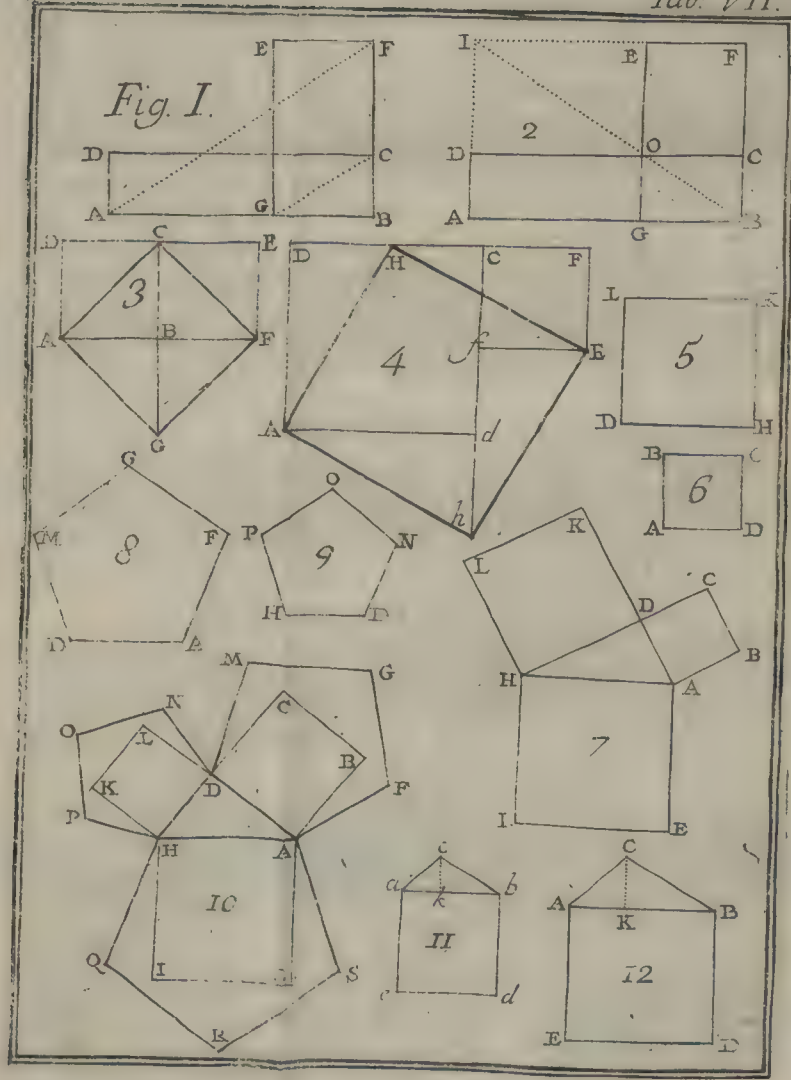
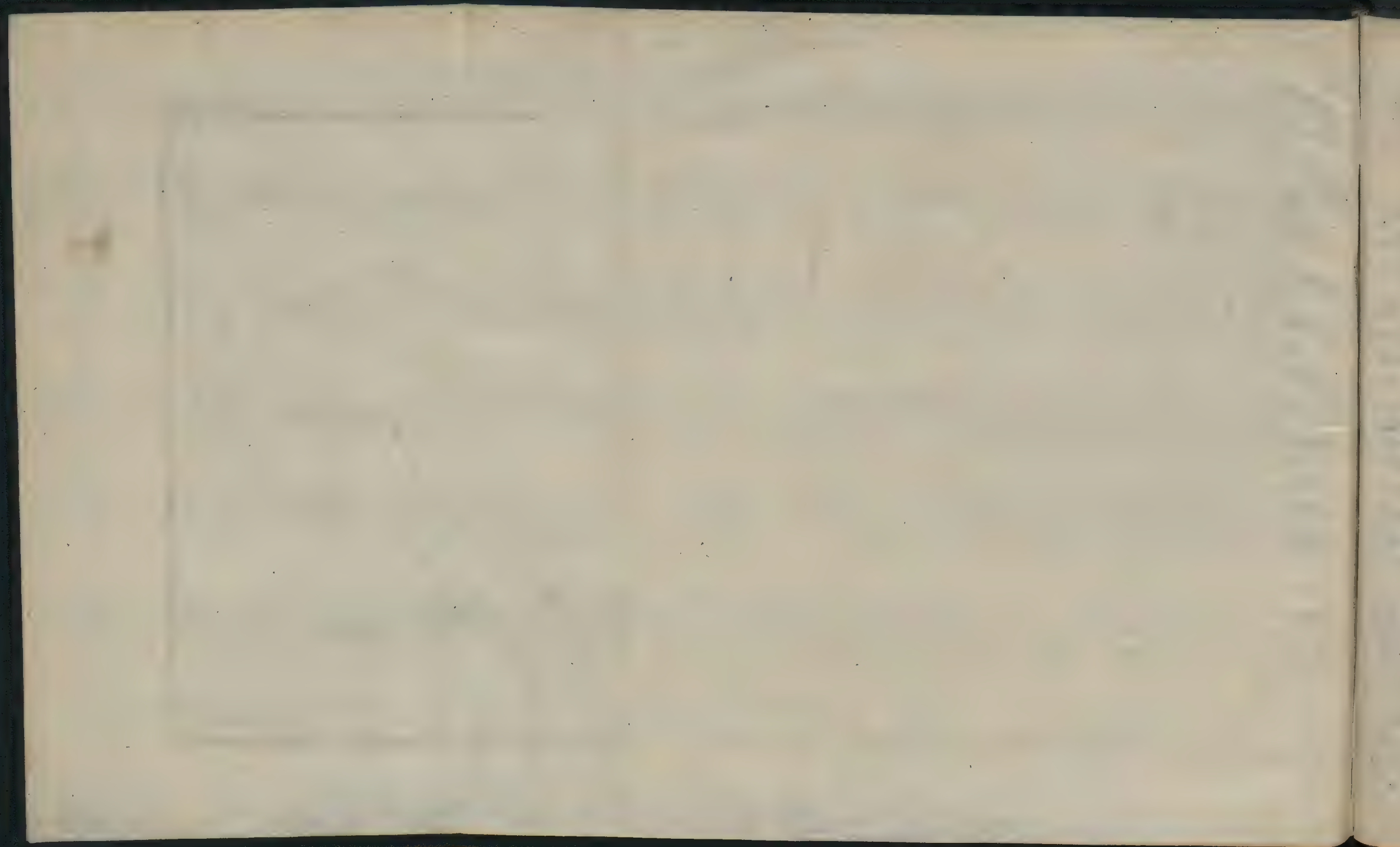
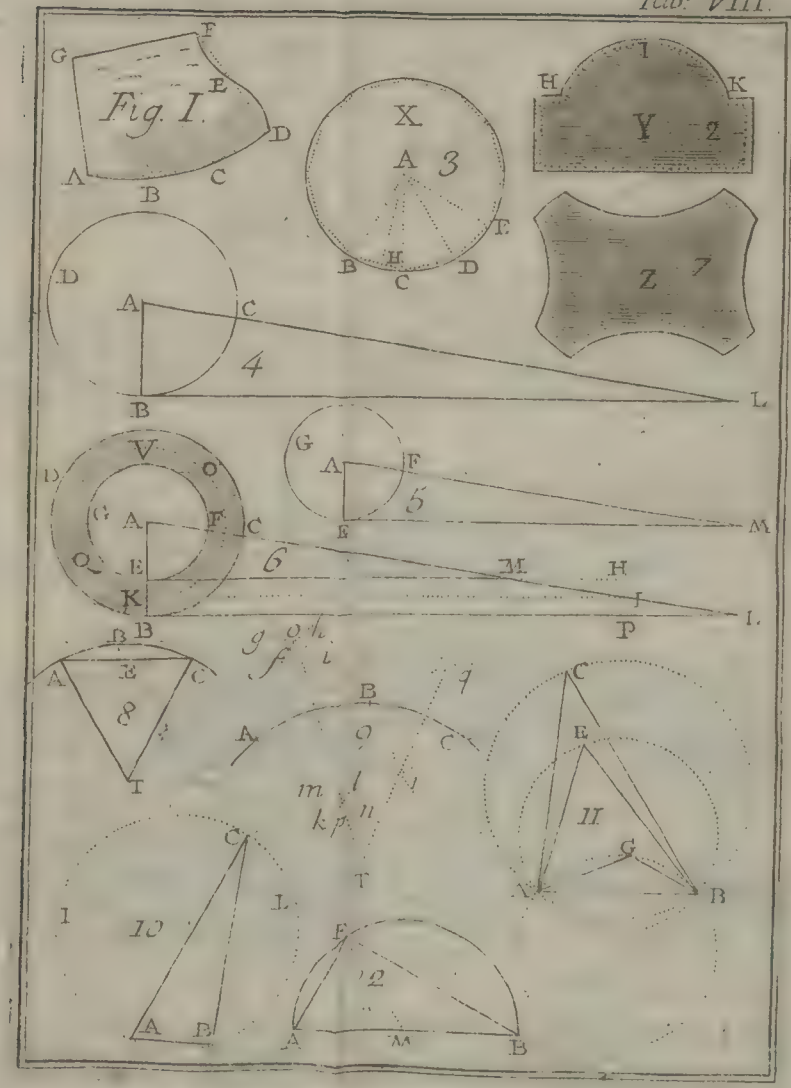


Fig. I.

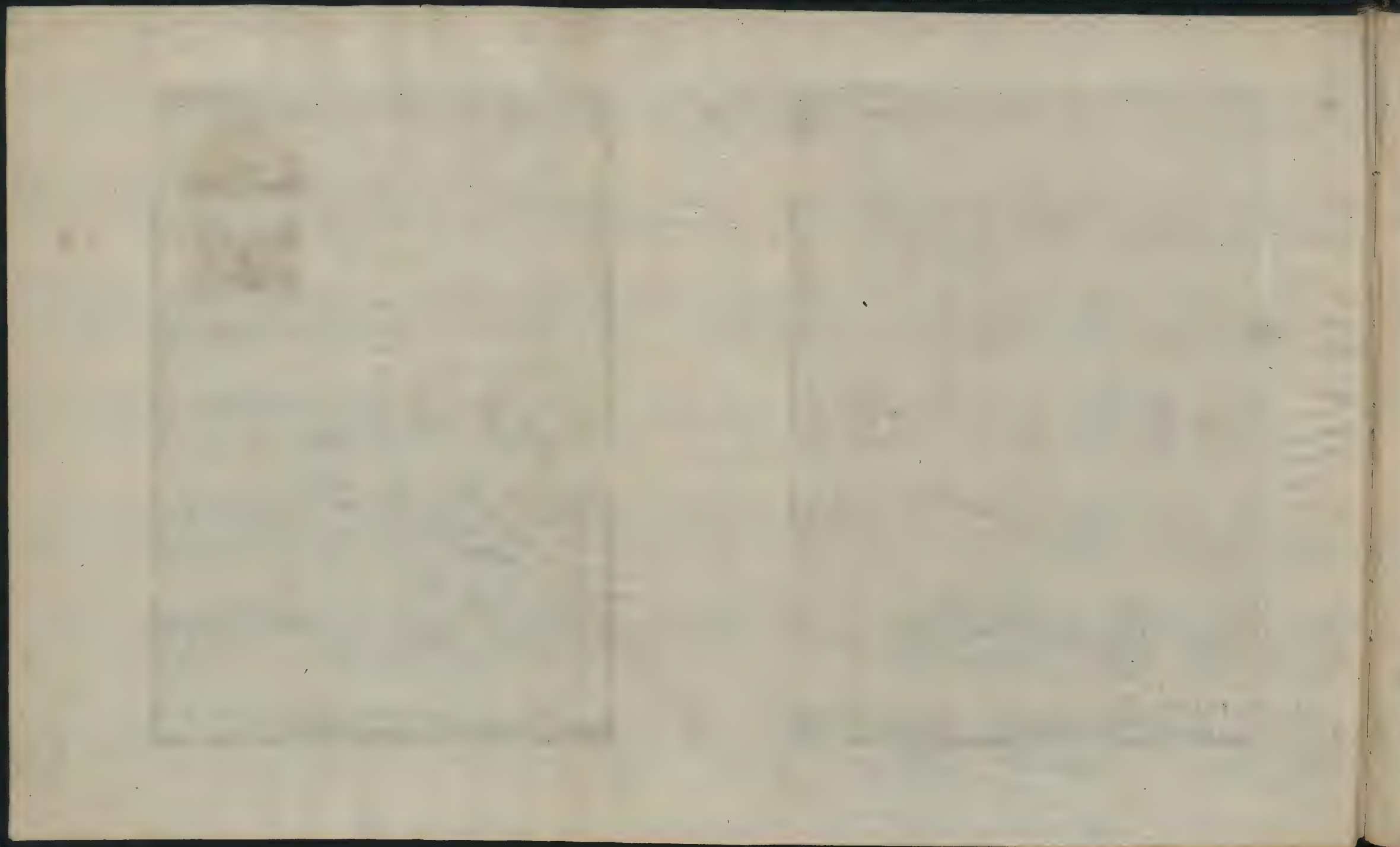


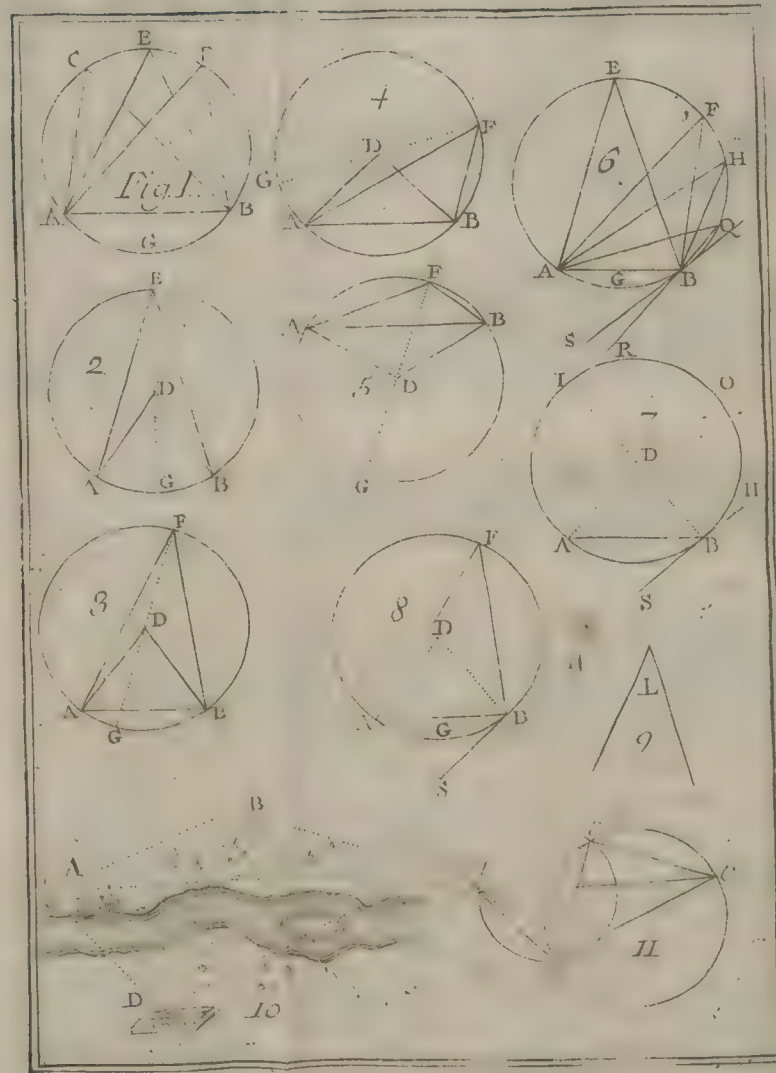




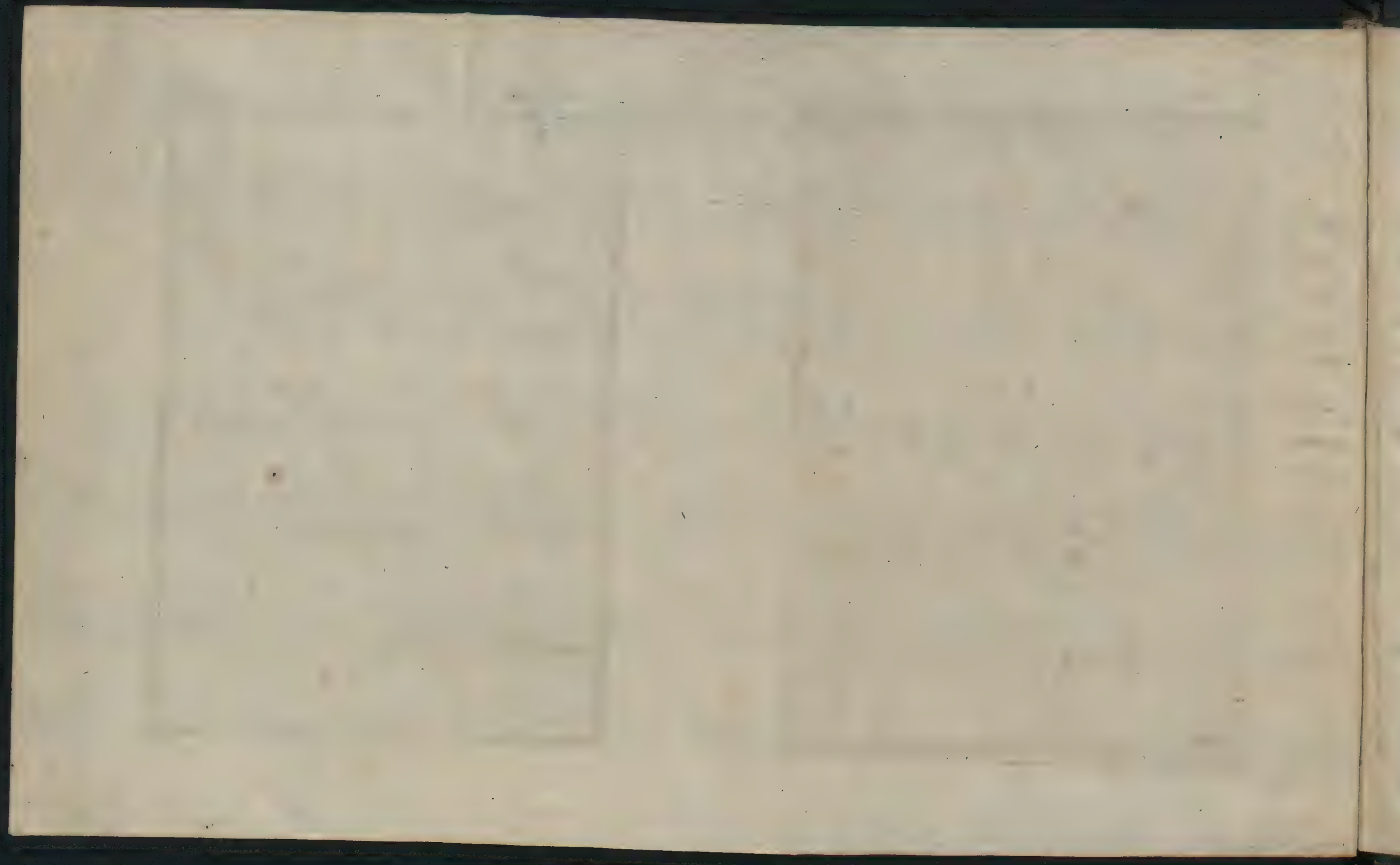


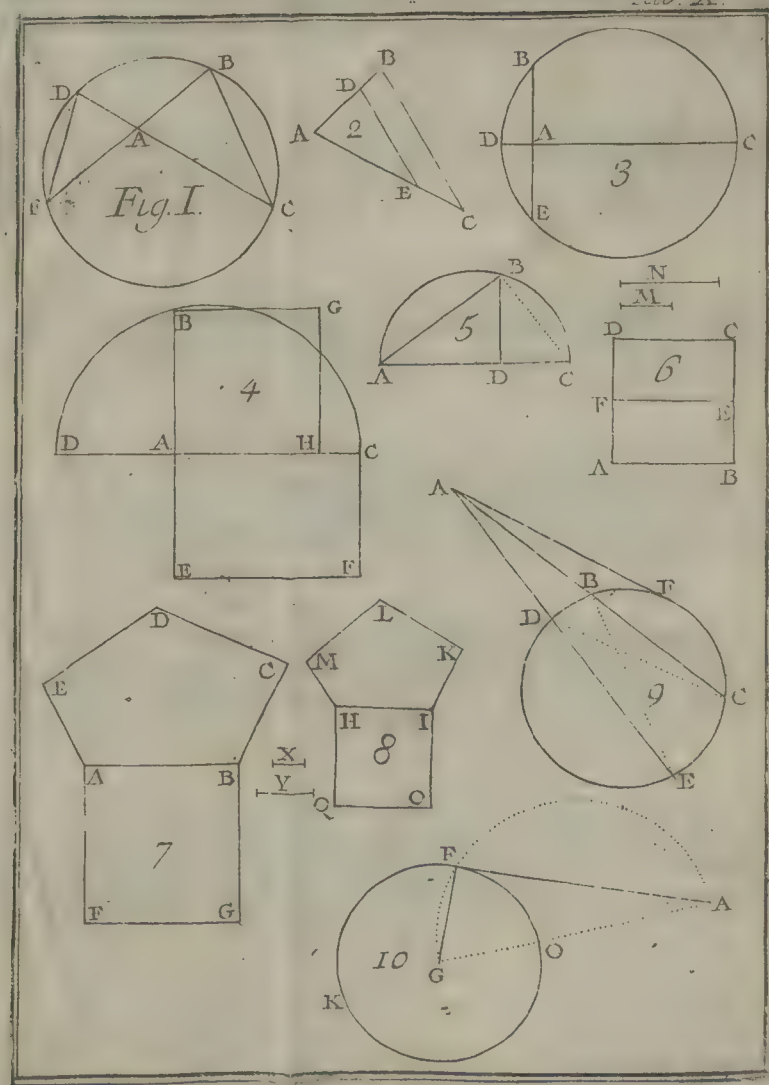




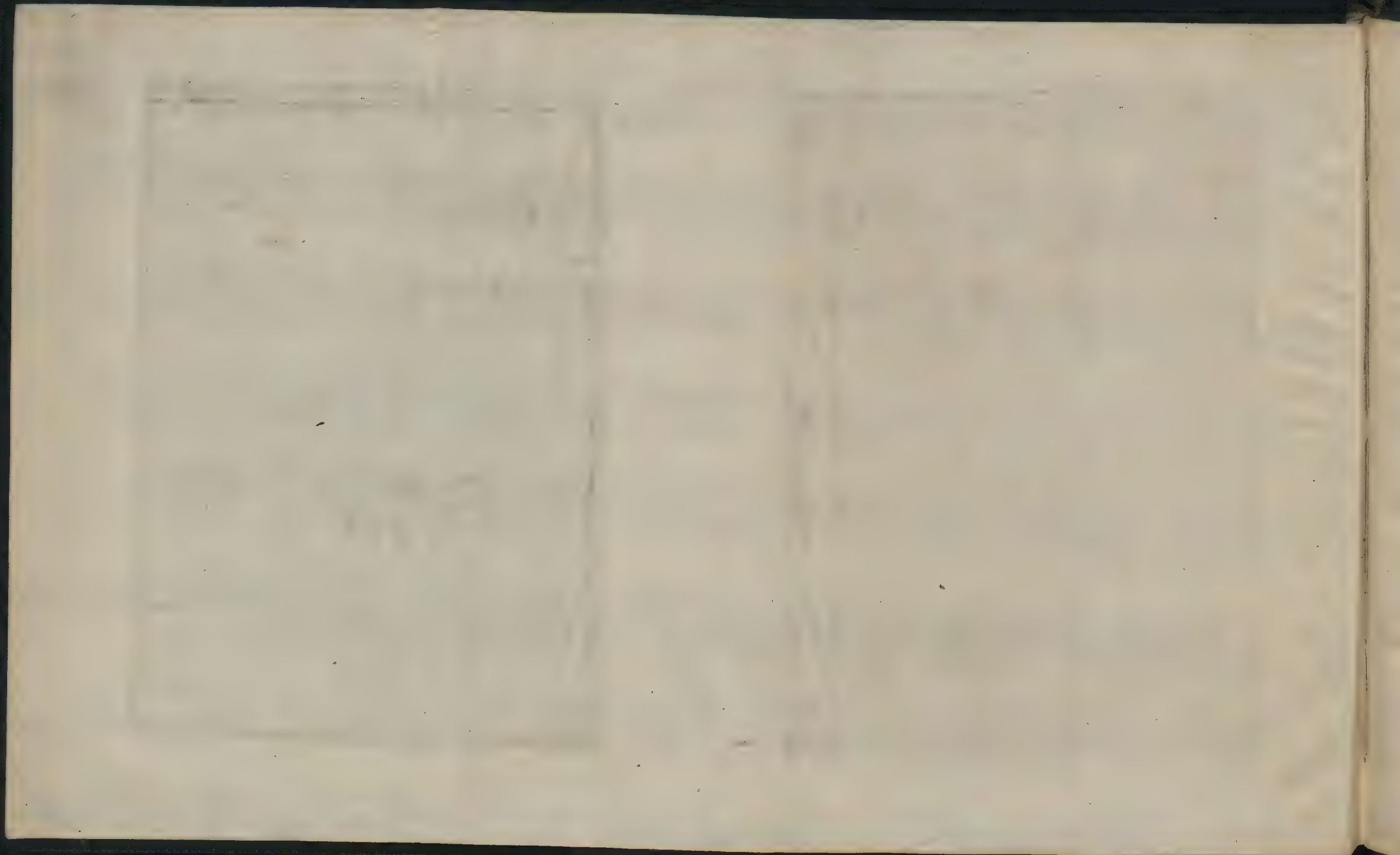


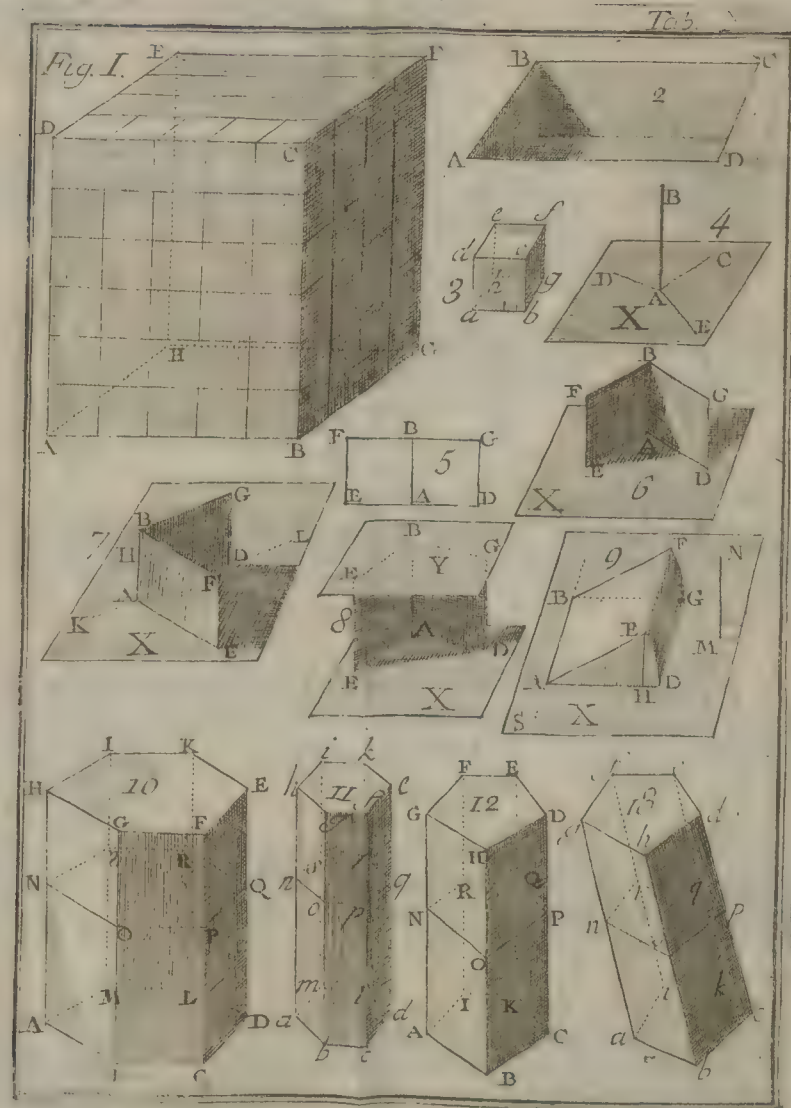




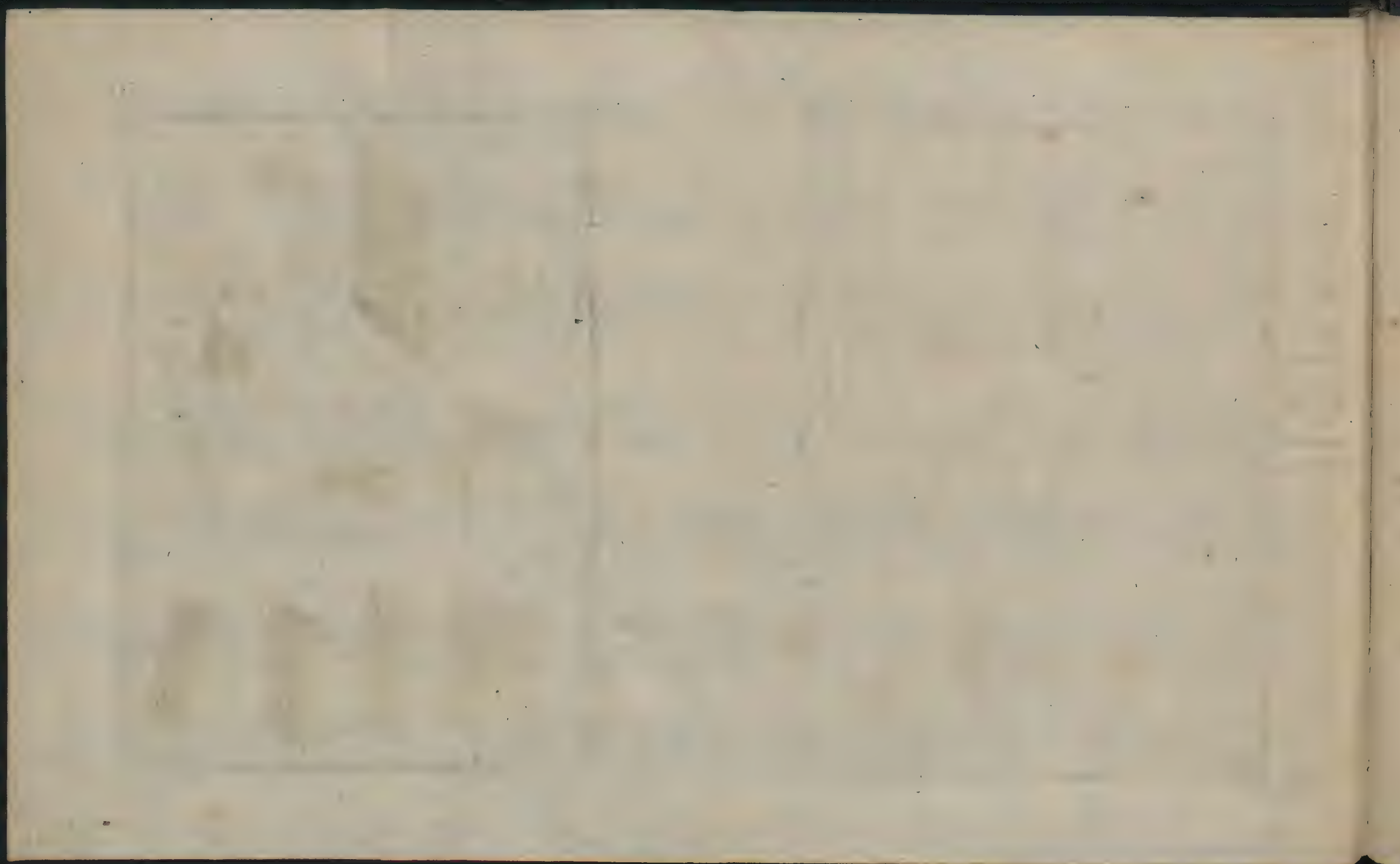




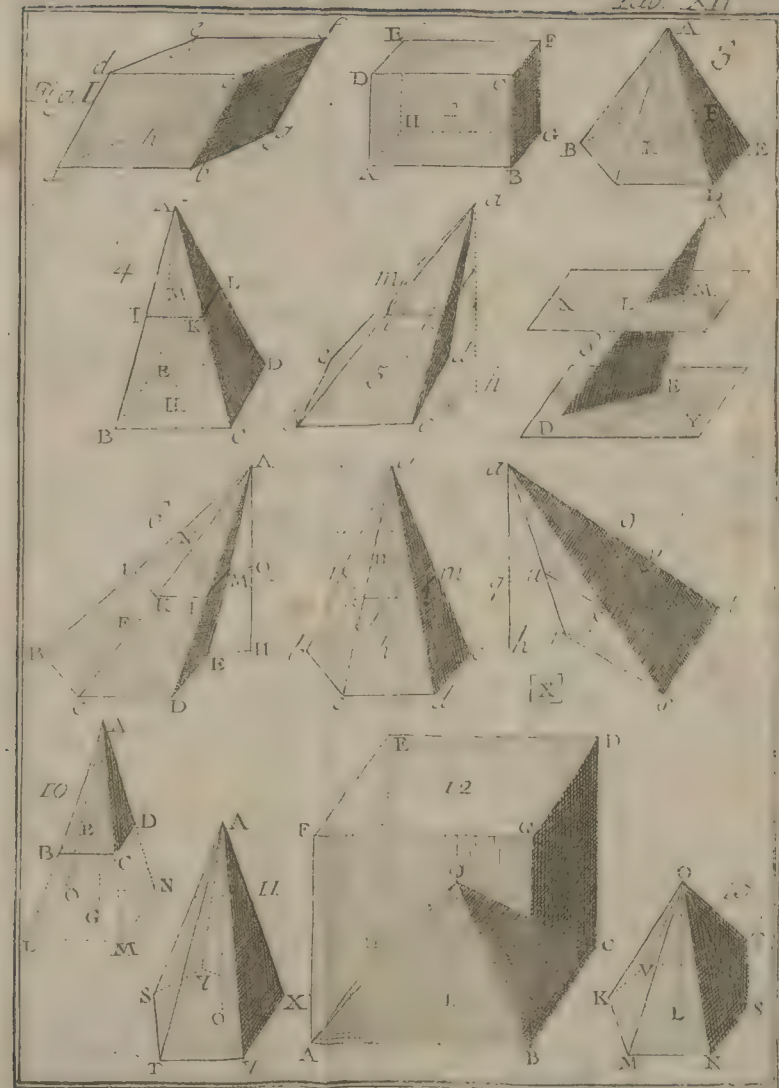




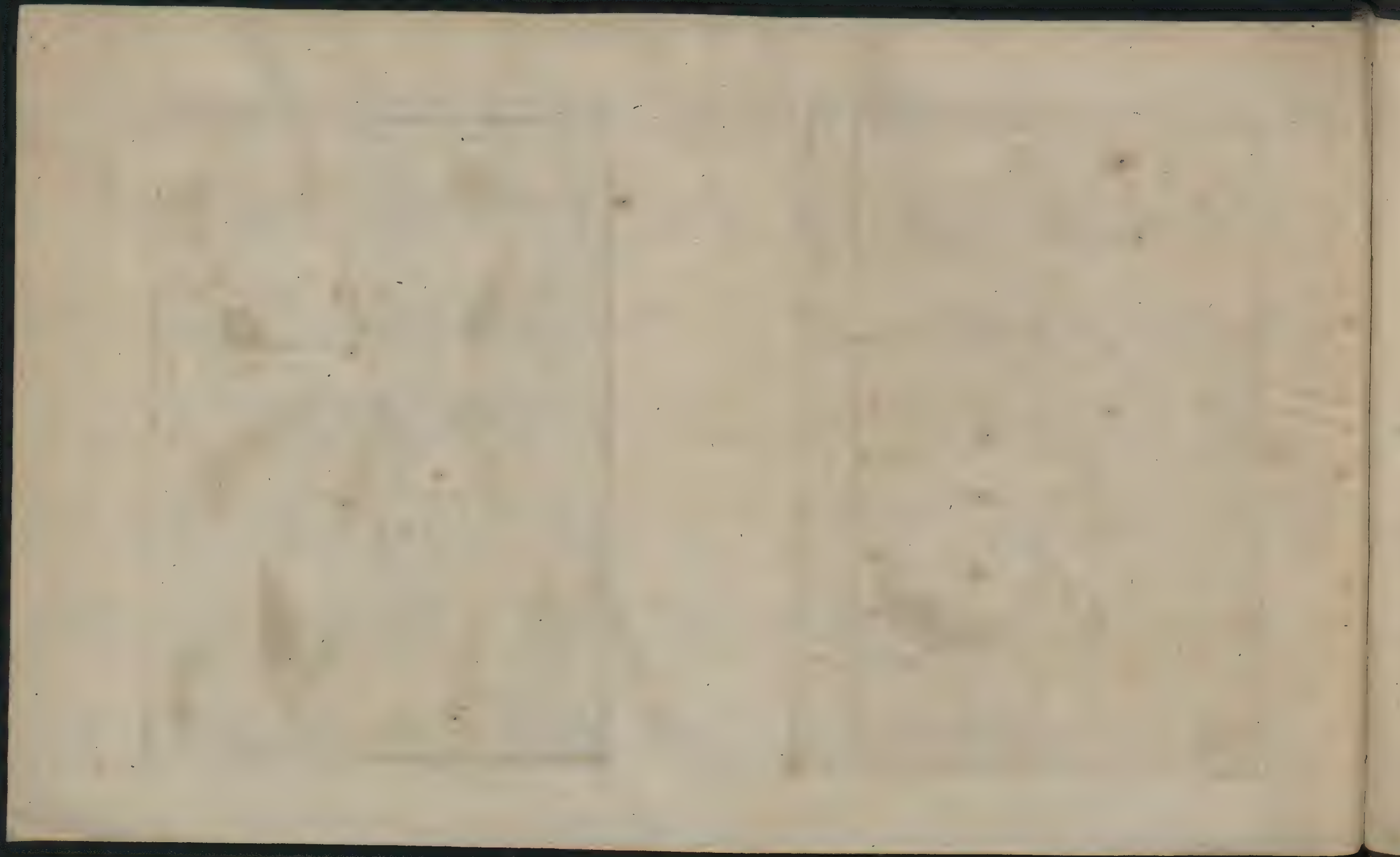


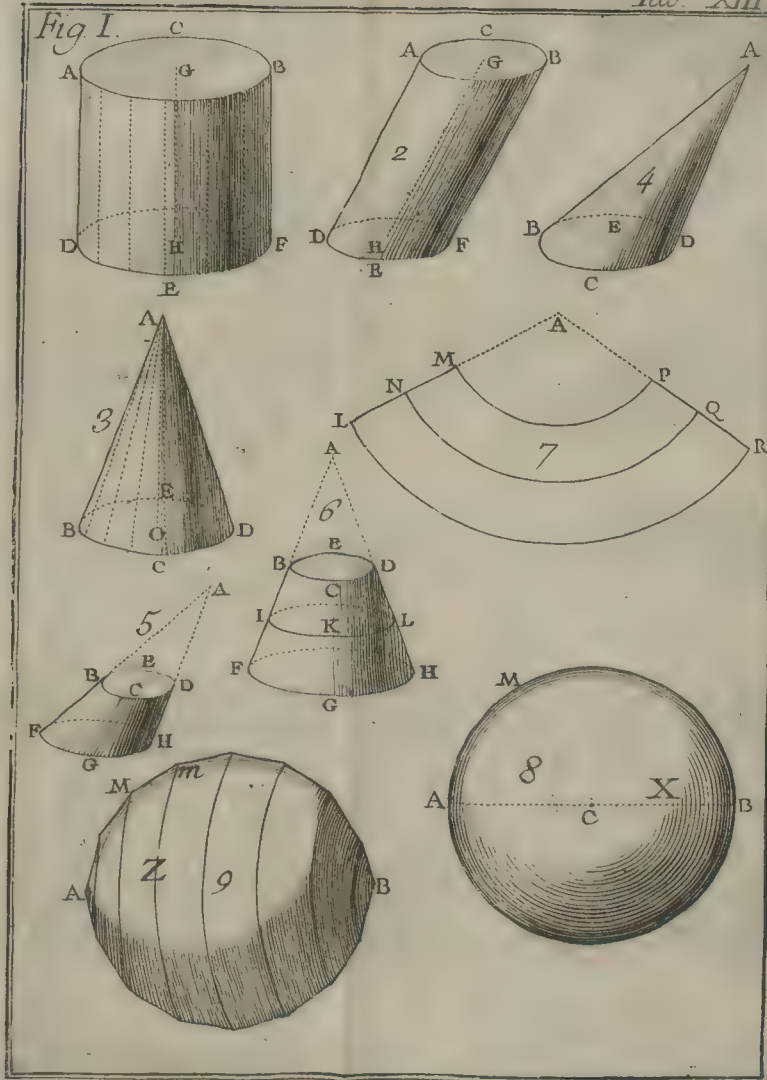


Tab. XVII

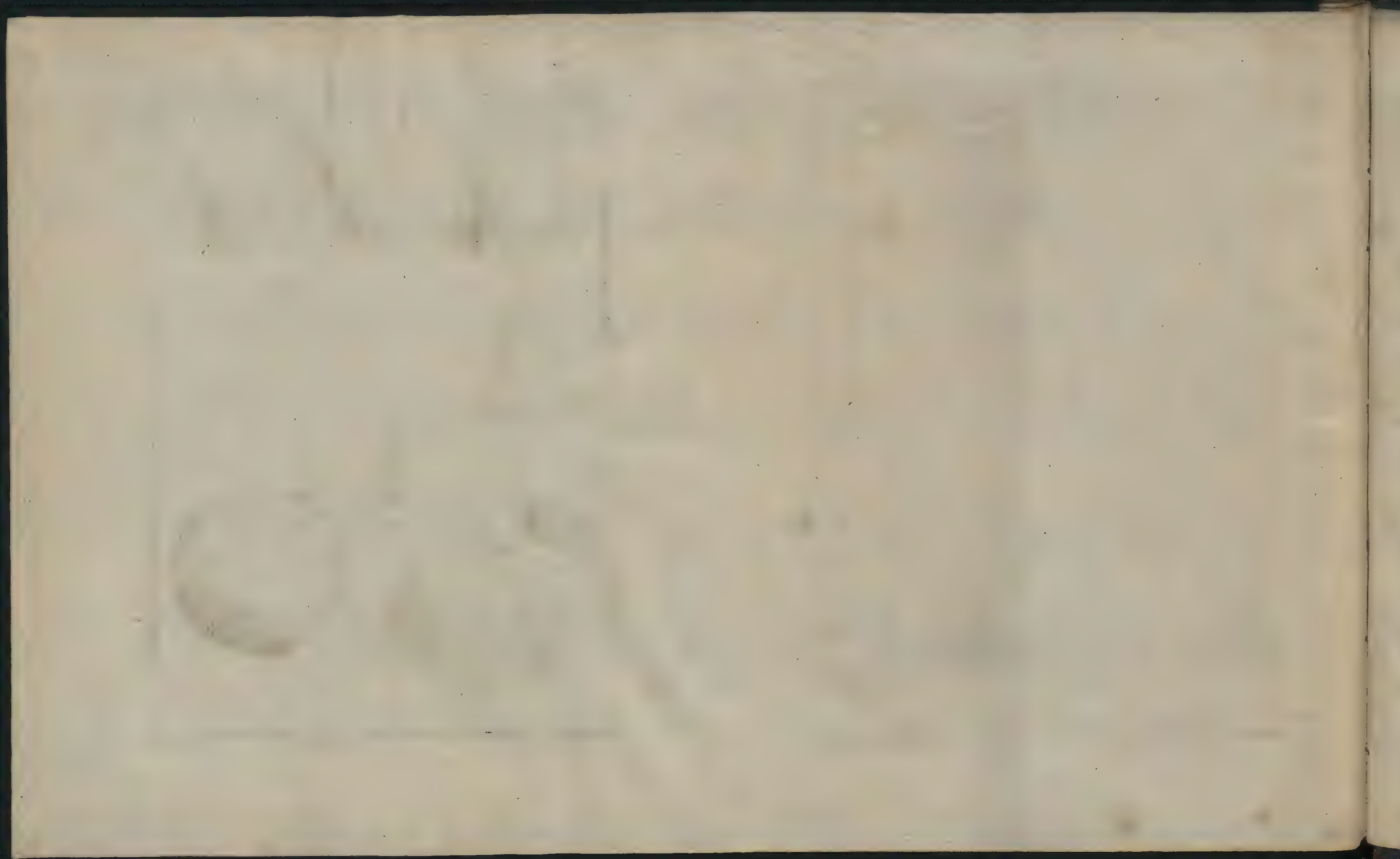


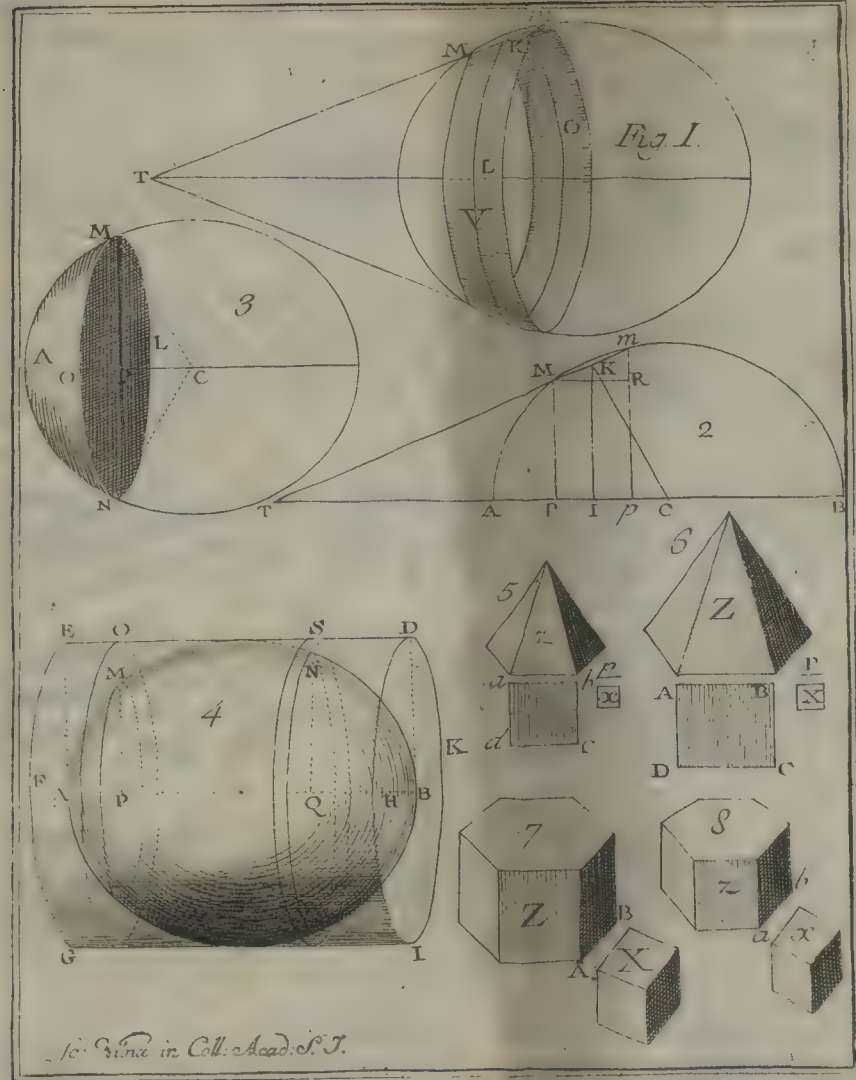












sc. Vnde in Coll. Acad. S. T.











